华章数学译丛

47

HZ BOOKS
华章教育

CRC Press
Taylor & Francis Group

Introduction to Stochastic Processes

(Second Edition)

随机过程导论

（原书第2版）

（美）Gregory F. Lawler 著

张景肖 译





（原书第2版）

随机过程导论

本书是一本非常优秀的随机过程教材，书中不仅介绍了随机过程的基础理论知识，还结合一些基础应用实例，阐明了如何应用这些知识来解决实际问题。本书主要内容包括有限马尔可夫链、可数马尔可夫链、连续时间马尔可夫链、最优停时、鞅、可逆马尔可夫链、布朗运动和随机积分等。

本书最大的特点是侧重数学思想的分析而不是具体细节的理论证明，所需要的数学基础只是本科程度的概率论和一些线性代数的知识，而不需要读者有测度论的基础，为读者提供了一个学习随机过程的快速入门通道。

书中介绍的随机过程理论和方法可以满足数学、统计、计算机科学、经济学、工程等领域的学生和专业人士的需要。此外，本书还可以帮助读者了解随机过程知识在工作学习中的应用前景。

作者简介



Gregory F. Lawler 1976年获得弗吉尼亚大学学士学位，1979年获得普林斯顿大学博士学位。曾为康奈尔大学数学系教授，现为芝加哥大学数学系教授。

Introduction to Stochastic Processes

(Second Edition)



客服热线：(010) 88378991，88361066
购书热线：(010) 68326294，88379649，68995259
投稿热线：(010) 88379604
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

封面设计 · 杨宇梅

上架指导：数学 随机过程

ISBN 978-7-111-31544-5



定价：36.00元

华章数学译丛

47

Introduction to Stochastic Processes

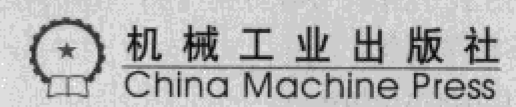
(Second Edition)

随机过程导论

（原书第2版）

（美）Gregory F. Lawler 著

张景肖 译



译者序

随机过程理论不仅在数学以及统计领域非常重要，在很多其他的学科领域也都有非常重要的应用，如工程、计算机科学、经济学、生物、物理等. 特别是现代数理金融理论，更是以此为必要的前提. 但是目前，关于随机过程的优秀教材，特别是中文教材并不是太多，而且这些教材的局限性也比较明显，有些要求读者要有测度论的基础，有些只针对理工科背景，主要的局限性还在于对随机过程理论如何应用于实际问题介绍很少，读者在学习了这些教材后往往感觉帮助并不大. Gregory F. Lawler 的《随机过程导论》一书恰好可以弥补这些不足. 作者有长期在杜克大学讲述随机过程课程的经验，所面对的学生也有各种学习和研究背景，这给了作者很好的机会以选择合适的内容和讲述方式. 在仔细阅读了这本书后，译者觉得非常值得将这本书介绍给我国的读者.

本书最大的特点是侧重数学思想的分析而不是具体细节的理论证明，所需要的数学基础只是本科程度的概率论和一些线性代数的知识，而不需要读者有测度论的基础. 在随机过程应用的介绍方面，本书并没有针对某些领域给出特别专业的例子，而是一些非常基础的应用. 这样，一方面可以避免偏离本书的主题，另一方面也可以给那些需要了解应用的读者以启发，学习如何将随机过程的理论应用于解决实际问题.

本书介绍了随机过程的基础知识，内容非常丰富，可以满足来自不同领域的读者的需要. 总之，这是学习随机过程基础知识的一本快速的入门书，在本书中既可以学习到基础知识，又可以学习到应用这些知识解决具体问题时的思路. 这本书既可以作为不同专业本科阶段和研究生阶段的教材，又是一本很好的自学参考书.

在翻译本书的过程中，原书中的打印错误和一些不当之处已经做了修订. 限于译者的水平，译稿中存在的问题和不当之处，敬请读者批评指正.

在翻译本书过程中得到了刘燕平、毛燕妮、李贞贞同学的很多帮助，在此深表谢意.

感谢在本书的翻译过程中给予我们帮助的中国人民大学的张波教授，另外感谢本书的编辑一直以来的大力协助.

张景肖

2010 年 6 月

第 2 版前言

在第 2 版中，为了介绍现代数理金融理论，我们对随机积分这一章的内容作了很明显的扩展：扩大了对 Itô公式的讨论，介绍了吉尔萨诺夫（Girsanov）变换和费因曼-卡茨（Feynman-Kac）公式，并推导了 Black-Scholes 期权定价公式. 我们尽量采用与其他章节相同的风格来阐述这一章，即向读者充分地展示公式为什么正确，而不是拘泥于完整的数学细节.

在鞅这一章中增加了极大不等式的内容，关于布朗运动也增加了很多的内容. 书中加入了更多的例子，并增加了每章末的练习题. 此外，我们还修正了第 1 版中的错误和不妥之处，并推荐了一些文献.

第1版前言

本书是在 Math 240 课（“应用随机过程”）讲义的基础上修改完善而来的．我在杜克大学长期从事这门课程的教学工作，学习此课程的大多数学生是数学、计算机科学、经济学、商学、生物学、心理学、物理学、统计学和工程学等专业的研究生，也有数学系的高年级本科生．这些学生的数学背景差异很大，而且与他们各自研究领域相关的随机过程的特定内容也很不一样．

要学习本书，需要有比较好的基于微积分的本科概率论知识，同时应学习过包含特征值和特征向量等内容的线性代数课程．同时读者应具有一定的计算机基础．习题需要读者编写简单的程序并利用一些软件进行线性代数方面的计算．在我所有的班上，学生们都有足够的计算机能力做到这一点．鉴于大多数同学都有微分方程的基础，我将自然地使用相关内容，不过我在预备知识中还是用较短的篇幅介绍了线性微分方程．

在本书中我努力阐述数学的核心概念和方法，而不是列出所有的数学细节．测度论并不是本书必需的先修课程，但是我试图采用这样的写作方式，使那些懂得一些测度论的读者可以更详细了解本书呈现的主题．尽管本书主要是为那些想了解随机过程应用的读者而写的，但是书中对真正的应用讨论得并不多．原因在于，要想理解真正的应用，需要对相应的研究领域有比较深入的了解，而介绍那些随机过程能够应用的领域并不是本书的目标．所以我选择使用一些非常基本的例子，而让其他领域的专家去决定何时一些数学假设对于他们的应用是合理的．

第 1 章涵盖有限马尔可夫链的基本内容．在这里我并没有给出收敛到平衡态的相关证明，而是重点说明了收敛到平衡态和随机矩阵特征值的大小之间的关系．第 2 章讨论无限状态空间的情况，以在非负整数上带有反射边界的随机游动作为主要的例子，介绍了非常返、零常返、正常返等概念，本章最后讨论了分支过程．

第 3 章讨论连续时间马尔可夫链，集中在三个主要类型：泊松过程、有限状态空间和生灭过程．对于这些过程，我使用了向前微分方程来描述概率的发展，这比向后微分方程更简单、自然．遗憾的是，向前微分方程不适用于分析所有的连续时间马尔可夫链，这一事实在最后一节做了简要讨论．生灭过程的一个主要例子是马尔可夫队列．

在决策论的广泛研究领域中，我选择了马尔可夫链的最优停时理论来介绍，这部分内容放在第 4 章．最优停时理论可以把那些能够得出算法解决相关问题的数学理论很好地结合在一起．本章中最优停时的基本思想与第 5 章所使用的思想相似．

在随机过程的很多问题中，鞅的思想都是非常基础的．第 5 章的目标就是对鞅的这些思想做一个坚实的介绍．首先给出了条件期望的现代定义，这里我们自由地使用了“关于$\mathcal{F}_n$可测，即到时刻 n 之前的所有信息已知”这样的思想而没有使用 σ 代数语言去说明它的严格含义．对本章主要的定理——可选抽样定理和鞅收敛定理都给出了证明．这里的定理证明是很重要的，从证明的过程我们可以理解定理为什么不能一直适用．另外，我们讨论了一致可积．

第 6 章主要讲解更新过程的基本思想．对于非格点的随机变量，更新方程是主要的分析工具，而对于格点的随机变量，则使用马尔可夫链的方法．作为一个应用，我们分析了服务时间为一般分布的排队系统．

第 7 章讨论可逆马尔可夫链领域中的一些当前的研究专题. 首先给出关于收敛到平衡态的速率的一个更加数理的讨论，随后简单介绍马尔可夫链算法，此算法在物理学、计算机科学、统计学等学科的一些领域中变得越来越重要. 最后关于常返性的一节，很好地利用“变分”思想证明了一个很难直接给出证明的结论.

第 8 章走马观花地介绍布朗运动中的大量内容. 试图给出其所有的数学细节是不太可能的. 除了一维布朗运动外，我也介绍了多维布朗运动，并解释了为什么布朗运动和热方程本质上是一个问题. 我还试着讨论了一些由布朗运动所产生的集合的分形性质. 第 9 章简要介绍随机积分，这里的讨论是非常不正规的，我们的目的是让学生对什么是随机积分有一些认识.

对于一个学期的课程来说，本书的内容稍稍多了一些. 建议把第 1、2、3、5、8 章作为基础章节讲述，其余章节依照选修课程的学生的情况来决定. 基础章节应当按照顺序讲解，其他章节可以在任何时间讲授. 第 4 章和第 7 章运用了之前关于马尔可夫链的内容；第 6 章最后一节用到了马尔可夫链和鞅的内容；而第 9 章则用到了布朗运动的定义和鞅.

我要首先感谢 1992 年和 1994 年春季学期 Math 240 课堂上的学生，他们对这个讲义之前的版本给出了一些建议和修改意见. 我还要感谢 1992 年在准备本书的第 1 版时我的助手 Rick Clelland 以及 Michael Phelan 和 Daniel C. Wiener 帮忙审阅了书稿，并给予我很多宝贵的建议. 在本书的写作期间，我还得到了美国国家科学基金的部分资助.

目　　录

译者序

第 2 版前言

第 1 版前言

第 0 章　预备知识 ······ 1

0.1　引言 ······ 1

0.2　线性微分方程 ······ 1

0.3　线性差分方程 ······ 2

0.4　习题 ······ 5

第 1 章　有限马尔可夫链 ······ 6

1.1　定义和举例 ······ 6

1.2　极限行为和不变概率 ······ 9

1.3　状态分类 ······ 12

1.3.1　可约性 ······ 14

1.3.2　周期性 ······ 15

1.3.3　不可约、非周期链 ······ 16

1.3.4　可约或者周期链 ······ 16

1.4　返回次数 ······ 19

1.5　非常返态 ······ 20

1.6　举例 ······ 24

1.7　习题 ······ 27

第 2 章　可数马尔可夫链 ······ 33

2.1　引言 ······ 33

2.2　常返和非常返 ······ 34

2.3　正常返和零常返 ······ 38

2.4　分支过程 ······ 40

2.5　习题 ······ 43

第 3 章　连续时间马尔可夫链 ······ 48

3.1　泊松过程 ······ 48

3.2　有限状态空间 ······ 50

3.3　生灭过程 ······ 55

3.4　一般情形 ······ 60

3.5　习题 ······ 61

第 4 章　最优停时 ······ 64

4.1　马尔可夫链的最优停时 ······ 64

4.2　带成本的最优停时 ······ 68

4.3　带折现的最优停时 ······ 70

4.4　习题 ······ 71

第 5 章　鞅 ······ 74

5.1　条件期望 ······ 74

5.2　定义和举例 ······ 78

5.3　可选抽样定理 ······ 80

5.4　一致可积 ······ 83

5.5　鞅收敛定理 ······ 85

5.6　极大不等式 ······ 89

5.7　习题 ······ 91

第 6 章　更新过程 ······ 95

6.1　引言 ······ 95

6.2　更新方程 ······ 98

6.3　离散更新过程 ······ 104

6.4　$M/G/1$ 和 $G/M/1$ 排队模型 ······ 107

6.5　习题 ······ 109

第 7 章　可逆马尔可夫链 ······ 112

7.1　可逆过程 ······ 112

7.2　收敛到平稳分布 ······ 113

7.3　马尔可夫链算法 ······ 117

7.4　常返的判定准则 ······ 120

7.5　习题 ······ 122

第 8 章　布朗运动 ······ 125

8.1　引言 ······ 125

8.2　马尔可夫性 ······ 127

8.3　布朗运动的零集 ······ 130

8.4　多维布朗运动 ······ 133

8.5　常返和非常返 ······ 136

8.6　布朗运动的分形性质 ······ 138

8.7　比例原则 ······ 138

8.8 带漂移的布朗运动 …………………… 139
8.9 习题 ………………………………… 140
第9章 随机积分 ……………………… 144
9.1 关于随机游动的积分 ……………… 144
9.2 关于布朗运动的积分 ……………… 145
9.3 Itô公式 …………………………… 148
9.4 Itô公式的扩展形式 ………………… 151
9.5 连续鞅 …………………………… 156
9.6 吉尔萨诺夫变换 …………………… 157
9.7 费因曼-卡茨公式 ………………… 159
9.8 Black-Scholes 公式 ………………… 161
9.9 模拟 ……………………………… 164
9.10 习题 ……………………………… 164
进一步阅读的建议 ……………………… 167
索引 …………………………………… 168

第0章 预备知识

0.1 引言

随机过程是指随着时间变化的随机的过程. 更精确地说，随机过程是一族以时间作为参数的随机变量 X_t. 在本书中，时间一般是非负整数集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的子集，或者是非负实数 $[0,\infty)$ 的子集. 我们称第一种情形为离散时间过程；第二种情形为连续时间过程. 随机变量 X_t 取值于一个集合，此集合称为状态空间. 我们将会讨论状态空间为离散（即有限集或可数无限集）和状态空间为连续（即实数集 $\mathbf{R}$ 或 d 维空间 $\mathbf{R}^d$）两种情形.

为了研究随时间变化的确定性（非随机）过程，需要对微分方程（若时间是连续的）或差分方程（若时间是离散的）进行研究. 一个典型（一阶）微分方程具有如下的形式：

$$y'(t)=F(t,y(t)).$$

这里函数 $y(t)$ 的变化只依赖于 t 和 $y(t)$ 的取值，而与 t 之前的值无关. 有一大类随机过程也具有这样的性质：在 t 处的变化仅取决于过程在时刻 t 的值，而与时刻 t 之前的值无关. 这类过程称为马尔可夫过程. 对于这类过程的研究，必须掌握线性代数、微分方程、差分方程等方面的知识. 学习本书的读者需对线性代数比较熟悉. 而在接下来的两节中，我们将分别回顾一些要使用到的线性微分方程和线性差分方程中的内容.

0.2 线性微分方程

[1]这里我们简要回顾一下常系数齐次线性微分方程的一些内容. 要想了解更多细节，读者可以参考任何一本有关微分方程的入门教材.

考虑齐次微分方程：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0, \tag{0.1}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots a_{n-1}$ 为常数. 对任一给定的初值条件：

$$y(0)=b_0,y'(0)=b_1,\cdots,y^{(n-1)}(0)=b_{n-1},$$

方程（0.1）存在唯一的解满足这一初值条件. 为求得这样的一个特解，我们可以先求出方程的通解. 假设 $y_1(t),\cdots,y_n(t)$ 是方程（0.1）的 n 个线性无关解，则方程的任一解均可以写为：

$$y(t)=c_1y_1(t)+\cdots+c_ny_n(t),\quad c_1,\cdots,c_n \text{ 为常数}.$$

根据给定的初值条件，我们可以确定这些常数.

方程的解 $y_1,\cdots,y_n$ 可以通过寻找具有形式 $y(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的解来得到. 我们发现函数 $y(t)$ 要满足方程（0.1）当且仅当

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0.$$

若上述多项式有 n 个不同的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，我们就能得到 n 个线性无关解 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}$. 出现重根的情况相对复杂一点，但经过一点计算就会发现：如果 λ 是重数为 j 的根，则 $\mathrm{e}^{\lambda t},t\mathrm{e}^{\lambda t},\cdots,$

---

[1] 书中边栏页码与英文原书页码一致. ——编辑注

$t^{j-1}e^{\lambda t}$ 都是解. 因此对重数为 j 的根，就可以得到 j 个线性无关解，将所有的解合并在一起，我们同样可以得到所需的 n 个线性无关解.

接下来考虑一阶线性方程组：

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t). \end{aligned}$$

也可以将上面的线性微分方程组写成向量形式：

$$\overline{y}'(t) = \boldsymbol{A}\,\overline{y}(t),$$

其中 $\overline{y}(t) = [y_1(t), \cdots, y_n(t)]$（更确切地说，是这一向量的转置），$\boldsymbol{A}$ 是系数（a_{ij}）的矩阵. 对于任一给定的初值向量 $\overline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$，方程都存在唯一的解满足 $\overline{y}(0) = \overline{v}$，且该解可以很容易地写成矩阵的指数形式：

2

$$\overline{y}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}\,\overline{v}.$$

其中 $e^{t\boldsymbol{A}}$ 定义为如下幂级数的形式：

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\boldsymbol{A})^j}{j!}.$$

为了便于计算，一般可以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}$，其中 $\boldsymbol{D}$ 为某一对角阵：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

则

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}^{-1} e^{t\boldsymbol{D}} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1} \begin{bmatrix} e^{td_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{td_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{td_n} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}.$$

但是实际上，并不是每一个矩阵都能像上面那样对角化. 不过对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可以写成 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{J}$ 为若尔当（Jordan）标准型. 求若尔当标准型的指数形式比求对角矩阵的指数形式要稍微困难一些. 要了解更多细节，可以参阅任意一本线性代数的教材.

0.3 线性差分方程

线性差分方程理论非常类似于线性微分方程. 然而，由于差分理论在一般介绍微分方程的课程中并不考虑，且差分方程又会在离散时间马尔可夫链的研究中自然出现，所以在这里我们要比较详细地讨论关于这类方程的解的情况. 首先考虑方程

$$f(n) = af(n-1) + bf(n+1), K < n < N. \tag{0.2}$$

其中 $f(n)$ 是定义在整数集 $K \leqslant n \leqslant N$（$N$ 可取 ∞）上的函数，且 a，b 均为非零实数. 若 f 满足方程（0.2），且已知 $f(K)$ 和 $f(K+1)$ 的值，则 $f(n)$ 在 $K \leqslant n \leqslant N$ 上的值可以通过下面

的递归公式逐一求出：

$$f(n+1)=\frac{1}{b}[f(n)-af(n-1)].\tag{0.3}$$

3

反之，若 u_0，u_1 为任意实数，由递归式（0.3）可以定义 $f(n)$ 来求得方程（0.2）的一个解，满足 $f(K)=u_0$，$f(K+1)=u_1$. 同时注意到满足（0.2）的函数集合构成一个向量空间，即若 f_1，f_2 满足（0.2），则 $c_1f_1+c_2f_2$ 也同样满足该方程，其中 c_1，c_2 为任意实数，这一向量空间的维数为 2；实际上，此向量空间的一组基 $\{f_1, f_2\}$ 可以这样得到：f_1 是 $f_1(K)=1$，$f_1(K+1)=0$ 的解，f_2 是 $f_2(K)=0$，$f_2(K+1)=1$ 的解. 如果 g_1，g_2 是任意两个线性无关解，根据线性代数的一般知识可知，任一解都可以写成 $c_1g_1+c_2g_2$ 的形式，其中 c_1，c_2 为常数.

为了找到一对线性无关解，我们不妨做如下猜想：考虑函数 $f(n)=\alpha^n$，$\alpha\neq 0$. $f(n)$ 是方程（对于特定的 α）的解当且仅当

$$\alpha^n=a\alpha^{n-1}+b\alpha^{n+1}, K<n<N,$$

即

$$\alpha=a+b\alpha^2.$$

根据二次函数的求解公式可以求得

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2b}.$$

第Ⅰ种情况：$1-4ab\neq 0$. 在这种情况下，α 有两个不同根 α_1、α_2，从而可以得到通解

$$f(n)=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n.\tag{0.4}$$

第Ⅱ种情况：$1-4ab=0$. 此时只求得一个解 $g_1(n)=\alpha^n=\left(\frac{1}{2b}\right)^n$. 不过如果令 $g_2(n)=n\left(\frac{1}{2b}\right)^n$，则

$$\begin{aligned}ag_2(n-1)+bg_2(n+1)&=a(n-1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n-1}+b(n+1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n+1}\\&=\left(\frac{1}{2b}\right)^n\left[a(n-1)2b+\frac{b(n+1)}{2b}\right]\\&=\left(\frac{1}{2b}\right)^n n=g_2(n).\end{aligned}$$

因此，$g_2(n)$ 也是方程的解. 容易验证 g_1，g_2 是线性无关的，所以任一解都可以表示成如下形式：

$$f(n)=c_1\left(\frac{1}{2b}\right)^n+c_2n\left(\frac{1}{2b}\right)^n.$$

例 设函数 f 满足

$$f(n)=\frac{1}{6}f(n-1)+\frac{2}{3}f(n+1),\quad 0<n<\infty,$$

4

且 $f(0)=4$，$f(1)=3$. 此时我们将系数代入 α 表达式，得到

$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}.$$

从而通解为

$$f(n) = c_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^n + c_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

代入初值条件，得到

$$4 = f(0) = c_1 + c_2,$$

$$3 = f(1) = c_1\,\frac{3+\sqrt{5}}{4} + c_2\,\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

求解得 $c_1=2$，$c_2=2$，从而

$$f(n) = 2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^n + 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

到这里已经看出，(0.2) 的解由 $f(K)$ 和 $f(K+1)$ 的值唯一确定. 但是在某些情况下，已知的可能是边界值 $f(K)$ 和 $f(N)$，对于这样的边值问题，也可以用同样的方法求得——先找到方程的通解，之后解出系数. 例如，设 f 满足

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n+1),\quad 0 < n < 10,$$

$f(0)=0$，$f(10)=1$. 可以写出方程的通解为 $f(n)=c_1 1^n + c_2(-2)^n$，代入初值条件有

$$f(0) = 0 = c_1 + c_2,$$

$$f(10) = 1 = c_1 + c_2(-2)^{10},$$

解得 $c_1 = -c_2 = \frac{1}{1-2^{10}}$.

考虑研究随机游动时得出的差分方程

5

$$f(n) = (1-p)f(n-1) + pf(n+1),\quad p \in (0,1).$$

如果 $p \neq \frac{1}{2}$，则可以得到两个根 $\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = \frac{(1-p)}{p}$，从而通解为

$$f(n) = c_1 + c_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^n. \tag{0.5}$$

如果 $p=\frac{1}{2}$，得到唯一的根 $\alpha=1$，从而通解为

$$f(n) = c_1 + c_2 n. \tag{0.6}$$

以上分析的是二阶线性差分方程，而一般的 k 阶齐次线性差分方程具有如下形式：

$$f(n+k) = a_0 f(n) + a_1 f(n+1) + \cdots + a_{k-1} f(n+k-1). \tag{0.7}$$

对于 $n \geqslant 0$，假设我们希望找到满足方程 (0.7) 的函数，只要知道 $f(0),\cdots,f(k-1)$，就可以由递归公式推得 $f(n)$ $(n \geqslant k)$. 同样我们考虑具有 $f(n)=\alpha^n$ 这一形式的解，则 f 是方程的解当且仅当

$$\alpha^k = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{k-1}\alpha^{k-1}.$$

类似地，若方程有 k 个不同根，我们就能得到 k 个线性无关解；若出现 j 重根 α，则不难验证

$$\alpha^n, n\alpha^n, n^2\alpha^n, \cdots, n^{j-1}\alpha^n$$

是所有线性无关解. 根据与线性微分方程完全平行的理论，我们可以得到方程 (0.7) 的 k 个线性无关解. 由这些解的线性组合我们就能求出方程的所有解.

0.4 习题

0.1 求解满足如下方程组的所有函数 $x(t)$，$y(t)$：

$$x'(t) = y(t) - x(t),$$
$$y'(t) = 3x(t) - 3y(t).$$

并求出满足条件 $x(0)=y(0)=\frac{1}{2}$ 的特解.

0.2 求解 $f(n)$，$n=0,1,\cdots,10$，使其满足 $f(n)=\frac{1}{4}f(n-1)+\frac{3}{4}f(n+1)$，$n=1,2,\cdots,9$，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

6

0.3 斐波那契（Fibonacci）数列 F_n 定义为：$F_1=1$，$F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n>2$. 通过求解这一差分方程找到 F_n 的表达式.

0.4 求解 $f(n)$，$n=0,1,2,\cdots$，使其满足

$$f(0) = 0,$$
$$f(n) = \frac{1}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n+1) + \frac{1}{3}f(n+2), n \geqslant 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1.$$

0.5 求解定义在整数集的实值函数 f，使得

$$f(n) = \frac{1}{2}f(n+1) + \frac{1}{2}f(n-1) - 1. \tag{0.8}$$

[提示：首先证明 $f(n)=n^2$ 满足（0.8），之后假设 $f_1(n)$，$f_2(n)$ 均满足（0.8），求出 $g(n)=f_2(n)-f_1(n)$ 所满足的方程.]

0.6 (a) 求解定义在实数集上的实值函数 f，使得对所有的 x，

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = 0.$$

(b) 求解定义在整数集上的实值函数 f，使得对所有的 n，

$$f(n+2) = -f(n) - f(n+1).$$

7

第1章 有限马尔可夫链

1.1 定义和举例

考虑一个离散时间的随机过程 $X_n(n=0,1,2,\cdots,)$，其中 X_n 在有限集合 $S=\{1,\cdots,N\}$ 或者 $\{0,\cdots,N-1\}$ 上取值. 我们称 X_n 的所有可能取值为系统的状态（state）. 为了描述这样一个过程的概率性质，我们需要给出

$$\mathbf{P}\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}$$

的值，其中 n 为任意值，$(i_0,\cdots,i_n)$ 为任意的有限状态序列. 等价地，我们可以给出初始概率分布

$$\phi(i)=\mathbf{P}\{X_0=i\},i=1,\cdots,N$$

以及"转移概率"

$$q_n(i_n \mid i_0,\cdots,i_{n-1})=\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}, \tag{1.1}$$

这是因为

$$\mathbf{P}\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}=\phi(i_0)q_1(i_1 \mid i_0)q_2(i_2 \mid i_0,i_1)\cdots q_n(i_n \mid i_0,\cdots,i_{n-1}). \tag{1.2}$$

在本章中我们将讨论一类特殊的过程，即满足**马尔可夫性**（Markov property）的随机过程. 所谓马尔可夫性是指为了预测系统的未来行为，只需考虑系统现在所处的状态，而不需要知道它过去的行为. 也就是说，重要的是要知道系统所处的状态，而不是系统是如何到达此状态的. 用数学语言，可以将其表示为

$$\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

我们还要假定转移概率与时间无关，这称为时齐性. 一个**时齐马尔可夫链**（time-homogeneous Markov chain）是一个满足

9

$$\mathbf{P}\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=p(i_{n-1},i_n)$$

的过程，其中 p 是 $S\times S\to[0,1]$ 上的函数. 在本书中除特别指明外，我们所考虑的马尔可夫链均为时齐的. 为了给出马尔可夫链的概率性质，我们需要先给出初始概率分布 $\phi(i)=\mathbf{P}\{X_0=i\}$，以及转移概率 $p(i,j)$，这样由（1.2）可以得到

$$\mathbf{P}\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}=\phi(i_0)p(i_0,i_1)p(i_1,i_2)\cdots p(i_{n-1},i_n). \tag{1.3}$$

马尔可夫链的**转移矩阵**（transition matrix）$\boldsymbol{P}$ 是一个 $N\times N$ 矩阵，其 (i,j) 位置上的元素 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 为 $p(i,j)$. $\boldsymbol{P}$ 是一个**随机矩阵**，即满足

$$0\leqslant \boldsymbol{P}_{ij}\leqslant 1,1\leqslant i,j\leqslant N, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{P}_{ij}=1,1\leqslant i\leqslant N. \tag{1.5}$$

任意满足（1.4）和（1.5）的矩阵均可以作为一马尔可夫链的转移矩阵.

例1 **两状态马尔可夫链.** 我们考虑一个描述电话状态的简单模型，其中 $X_n=0$ 表明电话在时刻 n 空闲，$X_n=1$ 表明电话在时刻 n 繁忙. 我们假设在每个时间间隔内有一个电话打进的概率为 p(为了方便起见，假定在任意一个特定的时间间隔内至多有一个电话打进). 当电话繁忙

时，来到的呼叫无法进入系统．我们还假设前一时间间隔内忙的电话在下一时间间隔空闲的概率为 q．这一模型构成一个状态空间为 $S=\{0,1\}$ 的马尔可夫链，转移矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}.$$

这样的矩阵 P 给出了两状态马尔可夫链转移矩阵的一般形式．为了确定这个矩阵，只需给出 p，q 的值就可以了．这里我们写出了转移矩阵的两种不同形式，第一种标记出了状态，后者则没有．在本章中这两种标记形式都将被使用．

例 2 **简单排队模型**．接下来我们对前一个模型作一点改动：假定电话繁忙时，可以允许一个来电在系统内等待．从而在任意时刻，系统内的来电数在集合 $S=\{0,1,2\}$ 上取值，同样，假设任意一个接通的电话都以概率 q 在一个时间间隔内完成，且在系统没有达到饱和的情况下，接到新来电的概率为 p．由于一个电话来到的概率为 p(同样假设在任意时间间隔内只有一个呼叫)，所以我们可以令

$$p(0,0)=1-p, p(0,1)=p, p(0,2)=0$$

[10]

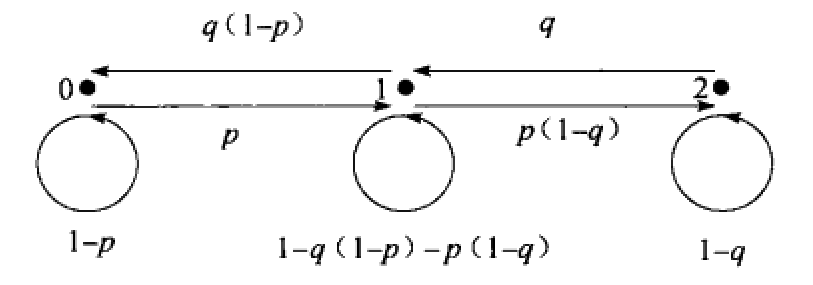
来描述此系统．同样，当系统内已经有两个来电时，新的来电将无法进入，并且两个来电也不可能同时结束，从而有

$$p(2,0)=0, p(2,1)=q, p(2,2)=1-q.$$

当系统中只有一个来电时，情况稍微复杂一点：如果现有的通话完成且没有新的来电进入系统，那么系统状态从 1 变为 0，即 $p(1,0)=q(1-p)$．类似地，如果现有通话未完成而又有新的来电到达，那么系统状态从 1 变为 2，即 $p(1,2)=p(1-q)$．因为每行的元素之和必须等于 1，所以 $p(1,1)=1-q(1-p)-p(1-q)$，从而有

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ q(1-p) & 1-q(1-p)-p(1-q) & p(1-q) \\ 0 & q & 1-q \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

转移概率常常可以用直观图的形式表示，图上的顶点代表状态，箭头表示转移方向．上面的矩阵可以用下面的图来表示：



例 3 **带有反射壁的随机游动**．考虑一个沿位置 $\{0,1,\cdots,N\}$ 移动的“随机游动”．

0 1 2 · · · · · · N-1 N

考虑质点在每一个时间点上向左或向右移动一步，向右移的概率为 p，向左移的概率为 $1-p$．如果游动到达边界点 $\{0,N\}$，那么以概率 1 向区间内移动．从而这一马尔可夫链的转

移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

[11]

$$p(i,i+1)=p,p(i,i-1)=1-p,0<i<N,$$
$$p(0,1)=1,p(N,N-1)=1,$$

当 i，j 取其他值时，$p(i,\ j)=0$. 如果 $p=\frac{1}{2}$，我们称其为带有反射壁的对称（symmetric）或者无偏（unbiased）随机游动；如果 $p\neq\frac{1}{2}$，那么称其为有偏（biased）随机游动. 有些时候考虑带有部分反射壁的情况相对更简便：在边界点 0 上，仍然以概率 p 向右移动，在边界点 N 上，以概率 $1-p$ 向左移动. 但是当质点试图离开状态空间 $\{0,1,\cdots,N\}$ 时，它将被边界吸收. 即它所对应的边界条件为：

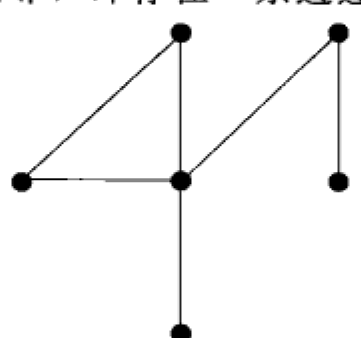
$$p(0,\ 0)=1-p,\ p(0,\ 1)=p,\ p(N,\ N-1)=1-p,\ p(N,\ N)=p.$$

例 4　带有吸收壁的随机游动. 该马尔可夫链与上一个例子的基本相同，只是当质点到达 0 或 N 时，它将永远停留在那里. 转移矩阵为

$$p(i,i+1)=p,p(i,i-1)=1-p,0<i<N,$$
$$p(0,0)=1,p(N,N)=1.$$

（从这里我们约定：对于特定的 i，j，如果 $p(i,\ j)$ 没有特别指明，均假定为 0.）

例 5　图上的简单随机游动. 一个（有限、简单、无向（finite，simple，undirected））图是由有限顶点集 V 和边集 E 构成的，其中每条边都连接着两个不同的顶点，并且任意两顶点之间至多存在一条边. 如果顶点 v_1，v_2 相邻，即存在一条边连接着这两个顶点，那么记为 $v_1\sim v_2$.



考虑这样的马尔可夫链：它的状态是图中的顶点. 在任意一个时间间隔内，该马尔可夫链从与现在状态相邻的状态中随机地选取一个新的状态. 该链的转移矩阵为

$$p(v_i,v_j)=\frac{1}{d(v_i)},v_i\sim v_j,$$

其中 $d(v_i)$ 是指与 v_i 相邻接的顶点数 [如果 $d(v_i)=0$，我们令 $p(v_i,\ v_i)=1$]，该马尔可夫链称为图上的简单随机游动（simple random walk on the graph）. 例 3 所示的带有反射壁的对称随机游动（$p=\frac{1}{2}$）即为图上简单随机游动的一个特例.

[12]

在给出转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及初始概率分布 ϕ 的条件下，我们如何确定马尔可夫链在给定时刻 n 处于状态 i 的概率？定义 n 步概率 $p_n(i,\ j)$ 为

$$p_n(i,j)=\mathbf{P}\{X_n=j\mid X_0=i\}=\mathbf{P}\{X_{n+k}=j\mid X_k=i\}$$

（根据时齐性可知第二个等式成立），从而

$$\mathbf{P}\{X_n=j\}=\sum_{i\in S}\phi(i)\mathbf{P}\{X_n=j\mid X_0=i\}.\tag{1.6}$$

我们可以证明 n 步转移概率 $p_n(i,j)$ 实际就是矩阵 $\boldsymbol{P}^n$ 在 (i,j) 位置上的元素. 要明白这一点，首先，注意到对于 $n=1$，这一结论明显成立；假设对一给定的 n，此结论成立，则

$$\mathbf{P}\{X_{n+1}=j \mid X_0=i\} = \sum_{k\in S}\mathbf{P}\{X_n=k \mid X_0=i\}\mathbf{P}\{X_{n+1}=j \mid X_n=k\}$$
$$= \sum_{k\in S} p_n(i,k)p(k,j).$$

由假定知，$p_n(i,k)$ 是 $\boldsymbol{P}^n$ 在 (i,k) 位置上的元素，所以最后求得的和就是 $\boldsymbol{P}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{n+1}$在 (i,j) 位置上的元素.

一个初始概率分布可以通过向量

$$\bar{\phi}_0 = (\phi_0(1),\cdots,\phi_0(N))$$

给出. [我们用$\bar{v}$表示向量 $(v(1),\cdots,v(N))$，无论$\bar{v}$是行向量还是列向量，我们都使用相同的记号. 例如，我们既可以写作$\bar{v}\boldsymbol{P}$ 也可以写作 $\boldsymbol{P}\,\bar{v}$，尽管在前者中$\bar{v}$为行向量，在后者中$\bar{v}$为列向量]. 如果 $\bar{\phi}_0$ 给定，那么在时刻 n 的分布 $\phi_n(i)=\mathbf{P}\{X_n=i\}$ 为

$$\bar{\phi}_n=\bar{\phi}_0\boldsymbol{P}^n.$$

例 6 考虑例 1 并假定电话在 0 时刻空闲. 设 $p=\frac{1}{4}$，$q=\frac{1}{6}$，令 $n=6$，则

$$\boldsymbol{P}^6\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix}0.424 & 0.576\\ 0.384 & 0.616\end{bmatrix}.$$

如果电话在 0 时刻空闲，那么 $\bar{\phi}_0=(1,0)$. 要想知道在此条件下，电话在时刻 6 繁忙的概率，计算

$$(\bar{\phi}_0\boldsymbol{P}^6)(1) = 0.576$$

13

即可.

1.2 极限行为和不变概率

了解马尔可夫链的极限行为意味着了解当 n 很大时 $\boldsymbol{P}^n$ 的性质. 我们首先考虑一个特殊的例子：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}.$$

计算该矩阵的幂很容易（使用计算机），很快可以看出当 n 很大时，

$$\boldsymbol{P}^n \approx \begin{bmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix},$$

即一个极限矩阵

$$\Pi=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n$$

存在且矩阵Π的各行都相同. 如果$\bar{v}$为任意概率向量 [我们将向量$\bar{v}=(v(1),\cdots,v(N))$ 称为概率向量，如果其各个分量非负且和等于 1]，那么

$$\lim_{n\to\infty}\bar{v}\boldsymbol{P}^n = \bar{\pi},$$

其中 $\bar{\pi}=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$是$\Pi$的一行. 另外一个例子，考虑 1.1 节例 2，令 $p=\frac{1}{4}$，$q=\frac{1}{6}$，

$$P=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{8}&\frac{2}{3}&\frac{5}{24}\\0&\frac{1}{6}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

我们可以看到同样的现象：对于一个很大的 n，

$$P^n\approx\begin{bmatrix}0.182&0.364&0.455\\0.182&0.364&0.455\\0.182&0.364&0.455\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\pi}\\\bar{\pi}\\\bar{\pi}\end{bmatrix},$$

其中 $\bar{\pi}=\left(\frac{2}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11}\right)$，所以对于任意概率向量$\bar{v}$都有

$$\lim_{n\to\infty}\bar{v}P^n=\bar{\pi}.$$

这说明无论系统在 0 时刻处于何种状态，在很长时间之后，没有电话打进系统的概率都大约为 $\pi(0)=\frac{2}{11}$.

假设 $\bar{\pi}$ 为一个极限概率向量，即对某一初始概率向量$\bar{v}$有

14

$$\bar{\pi}=\lim_{n\to\infty}\bar{v}P^n.$$

则

$$\bar{\pi}=\lim_{n\to\infty}\bar{v}P^{n+1}=(\lim_{n\to\infty}\bar{v}P^n)P=\bar{\pi}P.$$

如果对于 P 有

$$\bar{\pi}=\bar{\pi}P, \tag{1.8}$$

则称概率向量 $\bar{\pi}$ 为 P 的一个不变概率分布（invariant probability distribution）.

这样的 $\bar{\pi}$ 也称为平稳（stationary）概率分布、平衡（equilibrium）概率分布或者稳态（steady-state）概率分布．注意，一个不变概率向量是 P 的特征值 1 对应的一个左特征向量.

对于随机矩阵的不变概率分布，很自然地要问下面三个问题：

1）是不是每个随机矩阵 P 都存在一个不变概率分布 $\bar{\pi}$?

2）这个不变概率分布是否唯一？

3）什么时候能够得出

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{bmatrix}\bar{\pi}\\\bar{\pi}\\\vdots\\\bar{\pi}\end{bmatrix}$$

的结论，从而对所有不变概率分布$\bar{v}$有

$$\lim_{n\to\infty}\bar{v}P^n=\bar{\pi}?$$

我们首先考虑两状态马尔可夫链

$$P=\begin{bmatrix}1-p&p\\q&1-q\end{bmatrix},$$

其中 $0<p$，$q<1$．该矩阵的特征值为 1 和 $1-p-q$．我们可将 P 对角化：

$$D = Q^{-1}PQ,$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{q}{(p+q)} & \frac{p}{(p+q)} \\ -\frac{1}{(p+q)} & \frac{1}{(p+q)} \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{bmatrix}.$$

Q 的各列为 P 的右特征向量，Q^{-1} 的各行为其左特征向量．这样的特征向量在约去一个常量倍数的意义下是唯一的．因此可以在特征值 1 对应的左特征向量前乘以一个特定的常数使得其变为概率向量．这样 $\pi=\left(\frac{q}{(p+q)}, \frac{p}{(p+q)}\right)$ 就是 P 的唯一不变概率分布．一旦将 P 对角化就很容易计算它的幂： [15]

$$\begin{aligned} P^n &= (QDQ^{-1})^n \\ &= QD^nQ^{-1} \\ &= Q\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{bmatrix}Q^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{[q+p(1-p-q)^n]}{(p+q)} & \frac{[p-p(1-p-q)^n]}{(p+q)} \\ \frac{[q-q(1-p-q)^n]}{(p+q)} & \frac{[p+q(1-p-q)^n]}{(p+q)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因为 $|1-p-q|<1$，从而有

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \frac{q}{(p+q)} & \frac{p}{(p+q)} \\ \frac{q}{(p+q)} & \frac{p}{(p+q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \end{bmatrix}.$$

计算该极限的关键在于第二个特征值 $1-p-q$ 的绝对值小于 1，因此对 P^n 起主要贡献的是特征值为 1 的特征向量，即不变概率分布．

设 P 是任意的随机矩阵．很容易验证向量 $\bar{1}=(1,1,\cdots,1)$ 是特征值 1 对应的一个右（right）特征向量，所以对于特征值 1 至少存在一个左特征向量．假设我们可以证明：

能够选出一个左特征向量使得它的所有分量非负，(1.9)

特征值 1 是单重的，并且其他所有特征值的绝对值均小于 1. (1.10)

那么我们可以给出与两状态情况本质上相同的结论．虽然并不是所有的 P 都能够对角化，但是却都能进行若尔当分解（详细情况请参考线性代数的教材），即存在矩阵 Q，使得

$$D = Q^{-1}PQ,$$

其中 Q^{-1} 的第一行是唯一不变概率向量 π，Q 的第一列元素均为 1．矩阵 D 不一定是对角化的，但必须具备如下形式：

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

[16]

其中 $M^n \to 0$. 从而可以使用与两状态例子中相同的方法得到

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} QD^nQ^{-1} = Q\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}Q^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \vdots \\ \bar{\pi} \end{bmatrix}.$$

这样一来，我们就要问有哪些矩阵能够满足（1.9）和（1.10）. 线性代数中的佩龙-弗罗贝尼乌斯（Perron-Frobenius）定理就给出了满足（1.9）和（1.10）的一大类矩阵. 设 P 是所有元素均为严格正的随机矩阵，则根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理有：1 是 P 的单重特征值；对于特征值 1，存在某个左特征向量，其元素均为正（因此乘以适当倍数可使其成为概率向量）；其他所有特征值的绝对值严格小于 1. 我们在习题 1.20 中简略地对这一定理进行了证明.

尽管在这一定理中包含诸多矩阵，但却不能覆盖所有具有适当极限性质的随机矩阵. 例如，考虑（1.7）中的矩阵 P. 尽管 P 中的元素不全是正的，但注意到

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.594 & 0.354 & 0.052 \\ 0.177 & 0.510 & 0.312 \\ 0.021 & 0.250 & 0.729 \end{bmatrix},$$

所以 P^2 满足定理条件. 因此 1 是具有不变概率 π 的 P^2 的单重特征值，且 P^2 的其他特征值的绝对值都严格小于 1. 因为 P^2 的特征值是 P 的特征值的平方，且 P 的特征向量是 P^2 的特征向量，从而 P 也满足（1.9）和（1.10）. 因此我们得到一个一般的结论.

结论 如果 P 是一个随机矩阵，且对某一 n，P^n 的所有元素均为严格正的，则 P 满足（1.9）和（1.10）.

下节我们将对具有如下性质的随机矩阵 P 进行分类：对某一 n，P^n 的所有元素均为正.

1.3 状态分类

本节我们将研究在什么样的条件下，对一个随机矩阵 P 来说，存在一个充分大的 n，使得它的 n 次幂 P^n 的所有元素均为正. 我们先看一些不符合此情况的例子.

17

例 1 $\{0,\cdots,4\}$ 上的带有反射壁的简单随机游动. 这种情况下，

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

如果计算该矩阵的 n 次幂，可以很快发现 P^n 取决于 n 的奇偶性. 对于较大的 n，当其为偶数时，

$$P^n \approx \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0.50 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.50 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.50 & 0 & 0.25 \end{bmatrix},$$

当其为奇数时，

$$P^n \approx \begin{bmatrix} 0 & 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.50 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.50 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \end{bmatrix}.$$

容易看出为什么在 P^n 中会出现如此多的 0. 每一步的游动，质点或者从“偶数”点位置移动到“奇数”点位置，或者相反. 如果质点是从一个偶数点位置开始，那么经过偶数步移动之后质点仍将到达一个偶数点位置，即 $p_n(i, j)=0$，其中 i 为偶数，j 为奇数，n 为偶数. 类似地，从一个奇数点位置开始的质点经过奇数步移动之后仍将到达奇数点位置. 在这个例子中，我们称 P 的周期为 2.

例 2 {0, …, 4} 上带有吸收壁的简单随机游动. 这里，

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

18

当 n 很大时，可以看到

$$P^n \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这种情况下，质点最后将到达 0 或 4，然后一直停留在该状态. 观察矩阵第二行可以发现 $p_n(1, 0)\to\frac{3}{4}$ 以及 $p_n(1, 4)\to\frac{1}{4}$，这意味着从 1 开始的随机游动最终粘在 0 上的概率为 $\frac{3}{4}$，而最终粘在 4 上的概率为 $\frac{1}{4}$. 我们将类似于 1，2，3 的状态称为马尔可夫链的非常返态.

例 3 假设 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 且

$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{24} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}
\end{bmatrix} \end{array}.
$$

当 n 很大时，有

$$
\boldsymbol{P}^n \approx \begin{bmatrix}
0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\
0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.182 & 0.364 & 0.455 \\
0 & 0 & 0.182 & 0.364 & 0.455 \\
0 & 0 & 0.182 & 0.364 & 0.455
\end{bmatrix}.
$$

在这种情况下，该马尔可夫链分裂成两个互不相关的小链：其中一个的状态空间为 {1，2}，另外一个的状态空间为 {3，4，5}. 每个“子链”都收敛到一个平稳分布，但是从 {1，2} 中的一个状态无法转变成 {3，4，5} 中的任意状态. 我们称这样的系统为一个可约马尔可夫链.

以上的例子说明了无法满足（1.9）和（1.10）的马尔可夫链的所有可能情况，这也是本节的主要目的.

1.3.1 可约性

我们称马尔可夫链的两种状态 i，j 是**互通的**（communicate），记为 $i\leftrightarrow j$，如果存在 m，$n\geqslant 0$，使得 $p_m(i,j)>0$ 以及 $p_n(j,i)>0$. 换言之，两状态互通当且仅当该马尔可夫链从其中一个状态开始且最终能到达另一状态的概率为正. 互通关系是状态空间上的一类等价关系，即它是：**自反的**（reflexive），$i\leftrightarrow i$ [因为 $p_0(i,i)=1>0$]；**对称的**，$i\leftrightarrow j$ 意味着 $j\leftrightarrow i$(可以直接从定义得到)；以及**传递的**（transitive），$i\leftrightarrow j$ 且 $j\leftrightarrow k$ 蕴涵 $i\leftrightarrow k$. 要证明传递性成立，注意到：如果 $p_{m_1}(i,j)>0$，$p_{m_2}(j,k)>0$，则

[19]

$$
\begin{aligned}
p_{m_1+m_2}(i,k) &= \mathbf{P}\{X_{m_1+m_2}=k \mid X_0=i\} \\
&\geqslant \mathbf{P}\{X_{m_1+m_2}=k, X_{m_1}=j \mid X_0=i\} \\
&= \mathbf{P}\{X_{m_1}=j \mid X_0=i\}\mathbf{P}\{X_{m_1+m_2}=k \mid X_{m_1}=j\} \\
&= p_{m_1}(i,j)p_{m_2}(j,k) > 0,
\end{aligned}
$$

同理若 $p_{n_1}(j,i)>0$，$p_{n_2}(k,j)>0$，则有 $p_{n_1+n_2}(k,i)>0$. 这一等价关系将状态空间分割成互不相交的集合，称这些集合为**互通类**（communication class）. 例如，本节例 3 中有两个互通类 {1，2} 和 {3，4，5}.

如果只有一个互通类，即对所有 i，j 都存在 $n=n(i,j)$，使得 $p_n(i,j)>0$，那么称该马

尔可夫链为不可约的. 任意一个满足 (1.9) 和 (1.10) 的矩阵都是不可约的. 然而, 读者也可以验证本节例 1 同样也是不可约的, 例 2 中含有三个互通类 {0}, {1, 2, 3} 和 {4}. 在这个例子中, 如果链是从类 {1, 2, 3} 开始, 那么它将以概率 1 最终离开此类且不再返回. 具有这种性质的类称为**非常返类**, 其状态称为非常返态. 其他类则称为具有常返态的**常返类**. 从一个常返类开始的马尔可夫链永远不会离开此常返类.

设 $\boldsymbol{P}$ 是具有常返互通类 $R_1,\cdots,R_r$ 以及非常返类 $T_1,\cdots,T_s$ 的一个可约马尔可夫链的矩阵. 容易看出 $\boldsymbol{P}$ 至少存在一个常返类. 对任意常返类 R, 只考虑 R 中状态在 $\boldsymbol{P}$ 中所对应的行和列, 由其组成的 $\boldsymbol{P}$ 的子矩阵是一个随机矩阵. 因此可将 $\boldsymbol{P}$ 写成如下形式(或许需将状态重新排序之后):

$$\boldsymbol{P}=\left[\begin{array}{ccccc|c} \boldsymbol{P}_1 & & & & & \\ & \boldsymbol{P}_2 & & 0 & & \\ & & \boldsymbol{P}_3 & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & \boldsymbol{P}_r & \\ \hline & & \boldsymbol{S} & & & \boldsymbol{Q} \end{array}\right],$$

[20]

其中 $\boldsymbol{P}_k$ 是与 R_k 相关的矩阵. 则有

$$\boldsymbol{P}^n=\left[\begin{array}{ccccc|c} \boldsymbol{P}_1^n & & & & & \\ & \boldsymbol{P}_2^n & & 0 & & \\ & & \boldsymbol{P}_3^n & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & \boldsymbol{P}_r^n & \\ \hline & & \boldsymbol{S}_n & & & \boldsymbol{Q}^n \end{array}\right],$$

$\boldsymbol{S}_n$ 是某个矩阵. 要分析马尔可夫链在类 R_k 上的极限行为, 只需考虑矩阵 $\boldsymbol{P}_k$. 在 1.5 节我们将讨论 $\boldsymbol{Q}^n$ 的性质.

1.3.2 周期性

设 $\boldsymbol{P}$ 是一个不可约马尔可夫链的矩阵 (如果 $\boldsymbol{P}$ 可约, 那么可以分别考虑各个常返互通类). 我们定义状态 i 的**周期** (period) $d=d(i)$ 为

$$J_i := \{n \geqslant 0 : p_n(i,i) > 0\}$$

的最大公约数.

在本节的例 1 中, 各个状态的周期为 2; 事实上, 在这种情形下, 对所有 n, i 有 $p_{2n}(i, i)>0$, $p_{2n+1}(i, i)=0$.

设 J 为非负整数集上的任一非空子集, 且 J 对加法运算封闭, 即 $m, n\in J\Rightarrow m+n\in J$. 由于 $p_{m+n}(i, i)\geqslant p_m(i, i)p_n(i, i)$, 从而集合 J_i 是符合所设的 J 的一个例子. 令 d 为 J 中所有元素的最大公约数, 则 $J\subset\{0,d,2d,\cdots\}$. 此外, 可以证明 (习题 1.21) J 必包含 $\{0,d,2d,\cdots\}$ 中除去有限个元素以外的所有元素, 即存在 M 使得对所有 $m>M$ 有 $md\in J$. 因此对所有大于 $M=M_i$ 的 m, J_i 包含 md. 如果 j 是另一状态, 且 m, n 满足 $p_m(i, j)>0$, $p_n(j, i)>0$, 那么 $m+n\in J_i$, $m+n\in J_j$. 从而存在某整数 k 使得 $m+n=kd$. 还有, 如果 $l\in J_j$, 则

$$p_{m+n+l}(i,j) \geqslant p_m(i,j)p_l(j,j)p_n(j,i) > 0,$$

因此 d 能整除 l. 因此我们得到：如果 d 能整除 J_i 中的所有元素，则其也能整除 J_j 中的所有元素. 从这里我们可以看到所有的状态都具有相同的周期，因此可以讨论 $\boldsymbol{P}$ 的周期.（我们已经假设 $\boldsymbol{P}$ 是不可约的. 如果 $\boldsymbol{P}$ 可约，那么不同互通类中的状态很可能具有不同的周期.）

例 4 考虑图上的简单随机游动（见 1.1 节例 5）. 该马尔可夫链是不可约的当且仅当该图是 21 连通的，即任意两顶点可由图中的边组成的路径连接起来. 连通图（至少含有两顶点）中的每个顶点都至少与一个其他的点相连. 如果 $v \sim w$，则 $p_2(v, v) \geqslant p_1(v, w)p_1(w, v) > 0$. 因此，周期或者是 1 或者是 2. 容易看出周期为 2 当且仅当该图为偶图，即当且仅当所有的顶点能够分割成两个互不相交的集合 V_1，V_2，使得图中所有边都连接着 V_1 中的一个顶点以及 V_2 中的一个顶点. 注意到带有反射壁的对称随机游动即为偶图上简单随机游动的一个例子.

1.3.3 不可约、非周期链

如果 $d=1$，我们称不可约矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为*非周期的*（aperiodic）. 接下来我们将证明：如果 $\boldsymbol{P}$ 为不可约的且非周期的，那么存在 $M>0$，使得对所有 $n \geqslant M$，有 $\boldsymbol{P}^n$ 的所有元素均为严格正的. 要证明这点，取任意 i，j，由于 $\boldsymbol{P}$ 是不可约的，故存在某个 $m(i, j)$，使得 $p_{m(i,j)}(i, j)>0$. 此外，由于 $\boldsymbol{P}$ 是非周期的，故存在某个 $M(i)$，使得对所有 $n \geqslant M(i)$，有 $p_n(i, i)>0$. 因此对所有 $n \geqslant M(i)$，

$$p_{n+m(i,j)}(i,j) \geqslant p_n(i,i)p_{m(i,j)}(i,j) > 0.$$

令 M 为 (i, j) 所有组合中 $M(i)+m(i, j)$ 的最大值（由于状态空间是有限的，所以最大值存在），则对所有 $n \geqslant M$ 以及 i，j 有 $p_n(i, j)>0$. 利用 1.2 节最后得到的通则可以总结出下面的定理：

定理 *如果 $\boldsymbol{P}$ 为不可约、非周期马尔可夫链的转移矩阵，则存在唯一一个不变概率向量 $\bar{\pi}$ 满足*

$$\bar{\pi}\boldsymbol{P} = \bar{\pi}.$$

如果 $\bar{\phi}$ 为任意初始概率向量，则

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\phi}\boldsymbol{P}^n = \bar{\pi}.$$

且对任意 i，$\pi(i)>0$.

1.3.4 可约或者周期链

最后我们来讨论当 $\boldsymbol{P}$ 并非不可约和非周期时 $\boldsymbol{P}^n$ 的性质. 首先，设 $\boldsymbol{P}$ 为带有常返类 $R_1,\cdots,R_r$ 和非常返类 $T_1,\cdots,T_s$ 的可约矩阵，其中每个常返类都可以看做一个小的马尔可夫链；因此，存在 r 个不同的不变概率向量 $\bar{\pi}^1,\cdots,\bar{\pi}^r$，且 $\bar{\pi}^k$ 只集中于 R_k 上（如果 $i \notin R_k$，则 $\pi^k(i)=0$）. 或者说，特征值 1 是 r 重的，它在每个常返类上都有相应的特征向量. 简便起见，假设任意一个常返类的子矩阵 $\boldsymbol{P}_k$ 是非周期的，则当 $i \in R_k$ 时，有

22

$$\lim_{n\to\infty}p_n(i,j) = \pi^k(j), j \in R_k,$$

$$p_n(i,j) = 0, j \notin R_k.$$

如果 i 为任意一个非常返态，那么从状态 i 开始的该马尔可夫链最终将在一个常返态上结束. 这意味着对任意一个非常返态 j，

$$\lim_{n\to\infty} p_n(i,j) = 0.$$

令 $\alpha_k(i)$，$k=1,\cdots,r$ 为该马尔可夫链从状态 i 开始最终结束于常返类 R_k 上的概率 [在 1.5 节将讨论如何计算 $\alpha_k(i)$]. 一旦该马尔可夫链到达 R_k 上的一个状态，它将最终达到 R_k 上的平稳分布. 从这里我们可以看到，如果 $j\in R_k$，则

$$\lim_{n\to\infty} p_n(i,j) = \alpha_k(i)\pi^k(j).$$

如果 $\bar{\phi}$ 为任意一个初始概率向量，则

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\phi}\boldsymbol{P}^n$$

存在但其值取决于 $\bar{\phi}$.

现在假设 $\boldsymbol{P}$ 不可约，但周期 $d>1$. 这种情形下，状态空间分割成 d 个集合 $A_1,\cdots,A_d$，使得该马尔可夫链总是从 A_i 移动到 A_{i+1}（或者 A_d 到 A_1). 要解释 $\boldsymbol{P}^n$ 的极限行为，可以考虑本节例 1，其周期为 2. 令

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{P}$ 的特征值分别为 1，-1，0，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 特征值 1 是单重的且存在唯一一个不变概率 $\pi=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$. 然而，当计算 $\boldsymbol{P}$ 的幂时，-1 对应的特征向量变得与 π 同样重要. 我们可以将 $\boldsymbol{P}$ 对角化，

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q},$$

其中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix},$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

23

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

从而可以看出对于 P^n，绝对值小于 1 的三个特征值所对应的三个特征向量是不相关的，且当 n 很大时，

$$P^n \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

P^n 的渐近值依 n 的奇偶性而不同. 此时状态 i 的不变概率 $\pi(i)$ 并不代表 $p_n(j, i)$ 的极限值，而是代表在位置 i 所花费的时间的平均值. 实际上，读者可以验证：当 n 很大时，对于任意初始状态 j，$p_n(j, i)$ 和 $p_{n+1}(j, i)$ 的平均值接近于 $\pi(i)$，

$$\pi(i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}[p_n(j,i) + p_{n+1}(j,i)].$$

一般地，如果 P 为带有周期 d 的不可约矩阵，那么 P 有 d 个绝对值等于 1 的特征值，也就是满足方程 $z^d=1$ 的 d 个复根 z. 这 d 个特征值都是单重的；特别地，特征值 1 是单重的且存在唯一一个不变概率 $\bar{\pi}$. 给定任意初始概率分布 $\bar{\phi}$，当 n 很大时，$\bar{\phi}P^n$ 将在 d 个不同的分布间循环，但它们的均值为 $\bar{\pi}$，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}[\bar{\phi}P^{n+1} + \cdots + \bar{\phi}P^{n+d}] = \bar{\pi}.$$

1.4 返回次数

令 X_n 为不可约（但或许是周期的）马尔可夫链，其转移矩阵为 $\mathbf{P}$. 考虑从 0 时刻开始直到时刻 n，这 $n+1$ 个时刻中花费在状态 j 的时刻数： [24]

$$Y(j,n)=\sum_{m=0}^{n}I\{X_m=j\}.$$

这里我们记 I 为事件的"示性函数"，即事件发生则其值为 1，否则值为 0 的随机变量. 如果 π 为 $\mathbf{P}$ 的不变概率分布，则其遵循上节讨论得到的结果：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\mathbf{E}(Y(j,n)\mid X_0=i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\mathbf{P}\{X_m=j\mid X_0=i\}=\pi(j),$$

即 $\pi(j)$ 表示的是该马尔可夫链花费在状态 j 的时间与总的时间的比. 下面我们将 $\pi(j)$ 与首次返回状态 j 的时间联系起来.

固定状态 i，并设 $X_0=i$，令 T 为 0 时刻之后马尔可夫链首次到达状态 i 的时间，

$$T=\min\{n\geqslant 1:X_n=i\}.$$

由于该马尔可夫链是不可约的，从而 T 以概率 1 小于∞. 事实上（见习题 1.7），不难证明 $\mathbf{E}(T)<\infty$.

考虑第 k 次返回状态 i 所需的时间，其可以表示为 k 个随机变量之和 $T_1+\cdots+T_k$，其中每个变量均与 T 同分布. 这里，T_m 表示第（$m-1$）次返回与第 m 次返回之间的时间差. 当 k 很大时，由大数定律可知

$$\frac{1}{k}(T_1+\cdots+T_k)\approx\mathbf{E}(T),$$

即在该马尔可夫链的 $k\mathbf{E}(T)$ 步移动中大约有 k 次访问状态 i. 但是前面我们已经看到在 n 步移动中，访问状态 i 的期望值大约为 $n\pi(i)$. 因此令 $n=k\mathbf{E}(T)$ 可以得到：

$$\mathbf{E}(T)=\frac{1}{\pi(i)}. \tag{1.11}$$

就是说，假定该马尔可夫链从状态 i 开始，那么其返回状态 i 的期望步数等于不变概率的倒数. 当然上面的讨论并非十分严格，但也没必要花太多精力去详细证明（1.11）成立. 习题 1.15 用另外一种方式也推导出了（1.11).

例 考虑 $S=\{0,1\}$ 上的两状态马尔可夫链，

$$\mathbf{P}=\begin{matrix} & \begin{matrix}0 & \quad 1\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{bmatrix}\end{matrix},0<p,q<1.$$

[25]

设该马尔可夫链从状态 0 开始，令 T 为返回 0 的时刻. 在 1.2 节，我们已经证明了 $\pi=\left(\frac{q}{(p+q)},\frac{p}{(p+q)}\right)$，因此

$$\mathbf{E}(T)=\frac{1}{\pi(0)}=\frac{p+q}{q} \tag{1.12}$$

在这个例子中，我们可以清楚地写出 T 的分布并且证明（1.12). 对于 $n>1$，

$$\mathbf{P}\{T \geqslant n\} = \mathbf{P}\{X_1 = 1, \cdots, X_{n-1} = 1 \mid X_0 = 0\} = p(1-q)^{n-2}.$$

如果 Y 是在非负整数集上取值的任意一个随机变量，

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}\{Y = n\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(Y = n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\mathbf{P}\{Y = n\} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{Y \geqslant k\}. \tag{1.13}$$

因此，

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}\{T = n\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(T \geqslant n) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} p(1-q)^{n-2} = \frac{p+q}{q}.$$

这里需要强调的是（1.11）只给出了随机变量 T 的期望值，而没有任何关于 T 的分布的情况．一般地，只给定不变概率 π，无法说明任何关于 T 的分布的情况．要解释这一点，可以考虑上面的两状态的例子，并令 $p=q$，使得 $\mathbf{E}(T)=2$．如果 p 接近于 1，那么在大多数情况下 $T=2$，且 $\mathrm{Var}(T)$ 很小．如果 p 接近于 0，那么多数情况下 $T=1$，但偶尔 T 会取到较大的值，这样一来，$\mathrm{Var}(T)$ 就很大．

在下节，我们将讨论如何计算从 i 到 j（$i \neq j$）所需步数的期望值．

1.5 非常返态

[26] 设 $\boldsymbol{P}$ 为一个马尔可夫链 X_n 的转移矩阵．回想一下，状态 i 称为非常返的，如果该链以概率 1 仅访问 i 有限次．假设 $\boldsymbol{P}$ 中含有一些非常返态，且令 $\boldsymbol{Q}$ 是由 $\boldsymbol{P}$ 中非常返态所对应的行与列所构成的子矩阵．因此（将状态的次序重排后）$\boldsymbol{P}$ 可以写成

$$\boldsymbol{P} = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{\boldsymbol{P}} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{S} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{P}^n = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{\boldsymbol{P}}^n & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{S}_n & \boldsymbol{Q}^n \end{array}\right].$$

作为例子，我们考虑带有吸收壁的随机游动（1.3 节例 2）．重排状态空间后得到 $S=\{0,4,1,2,3\}$，从而可以写成：

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]\end{array}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]\end{array}. \tag{1.14}$$

矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为子随机矩阵，即为各元素均非负，且各行元素之和小于或等于 1 的矩阵．由于 $\boldsymbol{Q}$ 所代表的状态是非常返的，所以 $\boldsymbol{Q}^n \to 0$．这意味着 $\boldsymbol{Q}$ 的所有特征值的绝对值是严格小于 1 的．从而，$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵，可以定义矩阵

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}.$$

令 i 为非常返态，考虑访问 i 的总数 Y_i：

$$Y_i = \sum_{n=0}^{\infty} I\{X_n = i\}.$$

由于 i 是非常返的，所以 Y_i 以概率 1 小于∞. 设 $X_0=j$，其中 j 是另一个非常返态，则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_i \mid X_0 = j) &= \mathbf{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} I\{X_n = i\} \mid X_0 = j\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X_n = i \mid X_0 = j\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(j,i).\end{aligned}$$

换言之，$\mathbf{E}(Y_i \mid X_0=j)$ 是矩阵

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^2+\cdots$$

27

在 (j, i) 位置上的元素，同时也是矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\cdots$在 (j, i) 位置上的元素.

然而，通过简单的计算可以得到

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\cdots)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{I},$$

或者

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\cdots = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1} = M.$$

前面我们已经证明了矩阵 $\boldsymbol{M}$ 在 (j, i) 位置上的元素 $\boldsymbol{M}_{ji}$代表了从状态 j 开始访问 i 的平均次数. 如果我们想要计算此链直到进入一个常返类的期望步数，可以设 $X_0=j$，只需将所有非常返态 i 上的 $\boldsymbol{M}_{ji}$ 累加即可.

在特例 (1.14) 中，

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

从状态 1 开始，在被吸收之前，该马尔可夫链访问状态 3 的期望次数为$\frac{1}{2}$，而且该马尔可夫链被吸收前的期望总步数为$\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}=3$.

我们也可以利用这一方法求得一个不可约马尔可夫链从状态 j 到另一状态 i 所需要走的期望步数. 如果将状态 i 作为该马尔可夫链转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第一个状态，那么转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可以写为

$$\boldsymbol{P} = \left[\begin{array}{c|c} p(i,i) & \boldsymbol{R} \\ \hline \boldsymbol{S} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right].$$

接下来我们将 i 改为吸收状态，因此可以得到一个新矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{S} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right].$$

令 T_i 为该马尔可夫链到达状态 i 所需的步数. 换句话说，T_i 是使得 $X_n=i$ 的最短时间 n. 对任意一个其他状态 k，令 $T_{i,k}$为该马尔可夫链到达状态 i 之前访问 k 的次数（若马尔可夫链是从状态 k 开始，我们把它看做是对 k 的一次访问）. 这样就有

$$\mathbf{E}(T_i \mid X_0 = j) = \mathbf{E}\Big[\sum_{k \neq i} T_{i,k} \mid X_0 = j\Big] = \sum_{k \neq i} \boldsymbol{M}_{jk}.$$

[28] 也就是说，向量 $\boldsymbol{M}\bar{1}$ 的第 j 个分量表示该马尔可夫从状态 j 开始直到到达 i 所需要的步数.

例 1 设 $\boldsymbol{P}$ 为带有反射壁的随机游动的转移矩阵：

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

如果我们令 $i=0$，那么有

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\boldsymbol{M}\bar{1} = (7, 12, 15, 16).$$

所以，从状态 4 到达状态 0 所需要的期望步数为 16.

现在我们假设一个马尔可夫链至少存在两个不同的常返类，问：从给定的非常返态 j 开始，该马尔可夫链最终进入某一特定常返类的概率为多少？为了回答这个问题，我们可以假定常返类由满足 $p(r_i, r_i)=1$ 的点 $r_1, \cdots, r_k$ 构成. 如果我们重排状态使得常返态 $r_1, \cdots, r_k$ 在非常返态 $t_1, \cdots, t_s$ 之前，那么有

$$\boldsymbol{P} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & 0 \\ \hline \boldsymbol{S} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right].$$

对于 $i = 1, \cdots, s, j = 1, \cdots, k$，令 $\alpha(t_i, r_j)$ 为该马尔可夫链从状态 t_i 开始最终进入常返态 r_j 的概率. 我们令 $\alpha(r_i, r_i)=1$ 且如果 $i \neq j$，则 $\alpha(r_i, r_j)=0$. 对任意一个非常返态 t_i，

$$\begin{aligned} \alpha(t_i, r_j) &= \mathbf{P}\{X_n = r_j \text{ 最终} \mid X_0 = t_i\} \\ &= \sum_{x \in S} \mathbf{P}\{X_1 = x \mid X_0 = t_i\} \mathbf{P}\{X_n = r_j \text{ 最终} \mid X_1 = x\} \\ &= \sum_{x \in S} p(t_i, x) \alpha(x, r_j). \end{aligned}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $s \times k$ 阶矩阵，其对应的元素为 $\alpha(t_i, r_j)$，则上面等式可写成矩阵形式

[29]

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A},$$

或者

$$A=(I-Q)^{-1}S=MS.$$

例 2 考虑状态空间为 $\{0,\cdots,4\}$ 上的带有吸收壁的一个随机游动，如果我们重排状态后得到 $\{0,4,1,2,3\}$，使得常返态排在非常返态之前，那么

$$P=\begin{array}{c|cc|ccc} & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$S=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} 0 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}, \quad M=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{array}, \quad MS=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} 0 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

因此，质点从状态 1 开始，最终在状态 0 被吸收的概率为 $\frac{3}{4}$.

例 3 **赌徒输光**. 考虑状态空间为 $\{0,\cdots,N\}$ 上的带有吸收壁的一个随机游动. 令 $\alpha(j)=\alpha(j,N)$ 为质点从状态 j 开始最终在状态 N 被吸收的概率. 显然有 $\alpha(0)=0$，$\alpha(N)=1$. 对于 $0<j<N$，我们可以像上面一样考虑移动一步，可以得到

$$\alpha(j)=(1-p)\alpha(j-1)+p\alpha(j+1). \tag{1.15}$$

上式给出了带 $N-1$ 个未知数的 $N-1$ 个线性方程，未知数为 $\alpha(1),\cdots,\alpha(N-1)$. 要求出这个方程组的解，我们需要了解如何求解线性差分方程. 由 (0.5) 和 (0.6) 可以得到 (1.15) 的通解为

$$\alpha(j)=c_1+c_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^j, p\neq\frac{1}{2},$$

$$\alpha(j)=c_1+c_2 j, p=\frac{1}{2}.$$

边界条件 $\alpha(0)=0$，$\alpha(N)=1$ 让我们可以确定常数 c_1，c_2 的值，因此得到

$$\alpha(j)=\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}, \quad p\neq\frac{1}{2},$$

$$\alpha(j)=\frac{j}{N}, p=\frac{1}{2}. \tag{1.16}$$

30

注意到，如果 $p\leqslant\frac{1}{2}$，那么对任意固定的 j 有

$$\lim_{N\to\infty}\alpha(j)=0.$$

这就是说，在一场公平（或者不公平）博弈中，如果一个赌徒拥有数量为 j 的赌金，且每局赌博中，该赌徒赢得或输掉一个单位的赌金，那么该赌徒击败拥有巨额赌金 N 的庄家的概率是非常小的. 然而，如果 $p>\frac{1}{2}$，那么

$$\lim_{N\to\infty}\alpha(j)=1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^j>0.$$

这就是说，在一个对赌博者有利的赌博下，存在一个正的概率，使得该赌徒永远不可能输掉所有赌金从而能够一直赌下去.

设 $p=\frac{1}{2}$，令 T 为随机游动到达 0 或 N 所用的时间，并且令

$$G(j)=G(j,N)=\mathbf{E}[T\mid X_0=j].$$

显然，$G(0)=0$，$G(N)=0$，且通过考虑一步移动，我们可以得到

$$G(j)=1+\frac{1}{2}G(j-1)+\frac{1}{2}G(j+1),j=1,\cdots,n-1. \tag{1.17}$$

这是一个非齐次线性差分方程的例子. 该方程的一个解为 $G_0(j)=j^2$. 同时，如果 G_1，G_2 为 (1.17) 的两不同解，那么我们可以发现 $g=G_1-G_2$ 满足齐次方程

$$g(j)=\frac{1}{2}g(j-1)+\frac{1}{2}g(j+1),j=1,\cdots,n-1.$$

由此，可以看出 (1.17) 的所有解具有如下形式：

$$G(j)=j^2+c_1+c_2j.$$

将边界条件 $G(0)=G(N)=0$ 代入上式中，我们可以求得常数 c_1，c_2，从而得到

$$\mathbf{E}[T\mid X_0=j]=j(N-j) \tag{1.18}$$

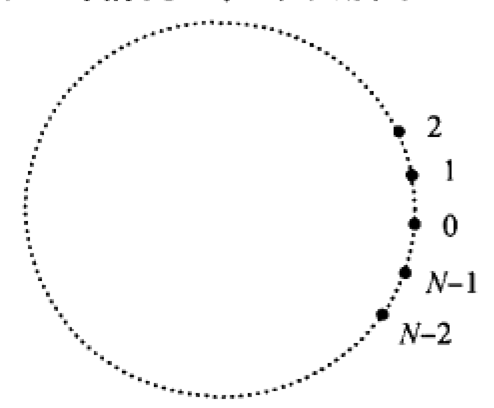
1.6 举例

[31] **图上的简单随机游动（1.1 节例 5）**. 假设该图是连通的，从而其上的随机游动是不可约的. 令 e 表示图中总的边数，$d(v)$ 表示将 v 作为其中一个结点的边的个数. 由于每条边均有两个结点，从而 $d(v)$ 对图中所有的顶点求和得到的值为 $2e$. 容易验证

$$\pi(v)=\frac{d(v)}{2e}$$

是该马尔可夫链的不变概率测度.

圈上的简单随机游动. 令 $N\geqslant 2$ 为一个整数，通过假定 $N-1$ 与 0 相邻，我们可以考虑 $\{0,1,\cdots,N-1\}$ 构成了一个“圈”的情况. 如下图所示：



令 X_n 为此圈上的简单随机游动，转移概率为

$$p(k,k-1)=p(k-1,k)=\frac{1}{2},k=1,\cdots,N-1,$$

$$P(0,N-1)=p(N-1,0)=\frac{1}{2}.$$

该游动的不变概率分布是均匀分布. 假设 $X_0=0$，令 T_k 为已访问的不同点的个数等于 k 的首达时刻，则 T_N 是每个点都被访问了的首达时刻. 根据定义有 $T_1=0$，显然 $T_2=1$. 我们接下来将计算 $r(k)=\mathbf{E}[T_k-T_{k-1}]$，$k=3,\cdots,N$；容易证明其值仅依赖于 k 而与 N 无关. 注意到，在时刻 T_{k-1} 该马尔可夫链处在一个边界点 $X_{T_{k-1}}$ 上，其邻点之一已经被访问，而另一个邻点尚未被访问. 那么下一步，质点要么将访问那个未被访问的点，要么将访问之前已被访问的点. 如果质点访问已访问过的点，那么该随机游动将继续进行下去直到它到达下一个边界点，以此往复. 由 (1.18) 知，随机游动从已被访问的点（边界点旁边的）到下一个边界点的期望时间为 $k-3$. 因此我们得到方程

$$r(k)=1+\frac{1}{2}[(k-3)+r(k)],$$

32

或者 $r(k)=k-1$. 所以，

$$\mathbf{E}[T_N]=1+\sum_{k=3}^{N}\mathbf{E}[T_k-T_{k-1}]=1+\sum_{k=3}^{N}(k-1)=\frac{N(N-1)}{2}.$$

我们同样可以求出该马尔可夫链最后访问的点 X_{T_N} 的分布. 可以证明这个随机变量的分布是 $\{1,\cdots,N-1\}$ 上的均匀分布. 我们将这一事实的推导留作习题（习题 1.16).

坛子模型. 假设有一个装有 N 个球的坛子，每个球的颜色不是红色就是绿色. 在每个时间间隔内，随机地从坛子中取出一个球，然后以$\frac{1}{2}$的概率用另外一种颜色的球替代该球放回坛子；以$\frac{1}{2}$的概率将该球直接放回坛子中. 令 X_n 为 n 次抽取之后坛中的红球数，则 X_n 为状态空间 $\{0,\cdots,N\}$ 上的一个不可约马尔可夫链，其转移矩阵为

$$p(j,j+1)=\frac{N-j}{2N},p(j,j-1)=\frac{j}{2N},p(j,j)=\frac{1}{2},j=0,1,\cdots,N.$$

读者可能猜测该马尔可夫链趋于保持红球和绿球的数目一致. 实际上，其不变概率是通过如下二项分布给出的：

$$\pi(j)=\binom{N}{j}2^{-N}.$$

直接可以证明这是一个不变概率，

$$\begin{aligned}(\bar{\pi}\mathbf{P})(j)&=\sum_{k=0}^{N}\pi(k)p(k,j)\\&=\pi(j-1)p(j-1,j)+\pi(j)p(j,j)+\pi(j+1)p(j+1,j)\\&=2^{-N}\binom{N}{j-1}\frac{N-(j-1)}{2N}+2^{-N}\binom{N}{j}\frac{1}{2}+2^{-N}\binom{N}{j+1}\frac{j+1}{2N}\\&=2^{-N}\binom{N}{j}=\pi(j).\end{aligned}$$

因此红球数的平稳概率分布与扔 N 次硬币头像朝上的次数的分布是一样的. 回顾中心极限定理，头像朝上的数目在$\frac{N}{2}$附近随机波动，且波动的大小与$\sqrt{N}$同阶. 通过将问题稍微改动一下，我们可以推测该马尔可夫链的不变分布：假设坛子中一直保持有同样的 N 个球，但当一个球被选中以后，我们以$\frac{1}{2}$的概率给它涂上另外一种颜色. 那么从长远来看，我们可以

33

认为这 N 个球会成为什么颜色与每个球以$\frac{1}{2}$的概率被涂成红色这两个事件是相互独立的.

细胞遗传. 考虑如下细胞繁殖模型的马尔可夫链. 假设每个细胞中含有 N 条染色体，每条染色体不是Ⅰ型就是Ⅱ型. 令 j 表示Ⅰ型染色体的数目. 在繁殖过程中，我们假定细胞自我复制之后分裂，染色体随机地分布在两个子细胞中. 复制之后，细胞中含有 $2j$ 条Ⅰ型染色体以及 $2(N-j)$ 条Ⅱ型染色体. 然后再从 $2N$ 条染色体中随机选取 N 条构成下一个细胞的染色体. 通过超几何分布，我们可以给出该马尔可夫链的转移概率为

$$p(j,k)=\frac{\binom{2j}{k}\binom{2(N-j)}{N-k}}{\binom{2N}{N}}.$$

该马尔可夫链有两种吸收态：0 和 N. 最终所有细胞要么只含有Ⅰ型染色体，要么只含Ⅱ型染色体.

我们假设开始有很大数量的细胞，其中每个细胞都有 j 条Ⅰ型染色体. 经过很长时间以后，总体中的每个细胞都只含有一种类型染色体. 那么在总体中所有只含Ⅰ型染色体的细胞占的比例为多少？由于在复制过程中，Ⅰ型染色体占的比例不会改变，因此我们可以认为该比例为$\frac{j}{N}$. 换言之，如果令 $\alpha(j)$ 为该马尔可夫链从状态 j 开始最终在状态 N 被吸收的概率，那么我们认为

$$\alpha(j)=\frac{j}{N}.$$

实际上，对于 $1\leqslant j\leqslant N-1$，我们可以证明这样的 $\alpha(j)$ 满足

$$\alpha(j)=\sum_{k=0}^{N}p(j,k)\alpha(k),$$

因此给出了吸收概率.

洗牌. 考虑一装有 n 张牌的盒子，且在牌上分别标记有 $1,\cdots,n$. 每次我们通过随机地抽取一张牌并将其放置于盒顶的方式来洗牌. 这个过程可以看做状态空间 S_n 上的一个马尔可夫链，其中 S_n 为 n 张牌的所有可能置换所组成的集合. 如果以 λ 表示任意一种置换（它与 $\{1,\cdots,n\}$ 一一对应），以 ν_j 表示将第 j 张牌移到盒顶的置换，则该马尔可夫链的转移概率为

$$p(\lambda,\upsilon_j\lambda)=\frac{1}{n},j=1,\cdots,n.$$

34

该马尔可夫链是不可约的且非周期的. 容易证明其唯一不变概率服从 S_n 上的均匀分布，即分配给每个置换的概率为$\frac{1}{n}!$. 因此，如果一开始牌的次序是任意排列的，那么经过足够多次的这种移动之后，牌可以洗得很均匀.

在本书中，没有讨论更复杂一些的问题，即经过多少次这样的移动才“足以”使牌洗得很

好. 其他的问题，像从一种给定置换到另一种置换需要移动的期望次数，理论上可以通过本章介绍的方法解决这个问题，但是从实用角度却无法解决. 因为转移矩阵为 $n! \times n!$ 阶，矩阵过大（除非 n 很小）导致无法进行必要的矩阵运算.

1.7 习题

1.1 Smith 家每天早晨都会收到报纸并且看完之后将它堆放起来. 每天下午，有人把所有堆起来的报纸拿走放到回收箱的概率为$\frac{1}{3}$. 另外，如果堆起来的报纸至少有五张的话，Smith 先生（以概率 1）将会把报纸放到回收箱中. 考虑晚上堆起来的报纸数. 对此问题用一个马尔可夫链来模拟是否合理? 如果可以，请写出相应的状态空间和转移矩阵.

1.2 考虑状态空间 {0，1} 上的一个马尔可夫链，其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}.$$

假设该马尔可夫链在时刻 $n=0$ 时处于状态 0，那么其在时刻 $n=3$ 时处于状态 1 的概率是多少?

1.3 考虑状态空间 {1，2，3} 上的一个马尔可夫链，其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

（列标号依次为 1，2，3.）

从长远来看该马尔可夫链处于状态 1 的概率为多少? 用两种不同方法求解：

1）通过计算矩阵的高次幂；

2）通过直接计算作为左特征向量的不变概率向量.

35

1.4 对转移矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

（列标号依次为 1，2，3.）

做与 1.3 相同的处理.

1.5 考虑状态空间为 $S=\{0,\cdots,5\}$ 上的一个马尔可夫链，其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

（列标号依次为 0，1，2，3，4，5.）

其互通类是哪些？常返的状态有哪些，非常返的状态又有哪些？假设系统开始处于状态 0，那么其在某极限时刻到达状态 0 的概率为多少？如果系统开始处于状态 5，这一概率又是多少？

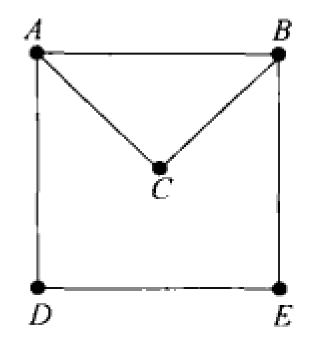
1.6 假设习题 1.3 中的马尔可夫链开始处于状态 2，计算当该马尔可夫链再次达到状态 2 所需的平均步数.

1.7 令 X_n 是状态空间 $\{1, \cdots, N\}$ 上的一个不可约马尔可夫链. 证明存在 $C<\infty$ 以及 $\rho<1$，使得对任意状态 i，j 有

$$\mathbf{P}\{X_m \neq j, m = 0, \cdots, n \mid X_0 = i\} \leqslant C\rho^n.$$

同时证明上述公式也蕴涵 $\mathbf{E}(T)<\infty$，其中 T 是该马尔可夫链首次到达状态 j 的时间.（提示：存在 $\delta>0$，使得对从任意状态 i 开始的该马尔可夫链，在前 N 步中到达 j 的概率都大于 δ. 为什么呢?）

1.8 考虑下图中的简单随机游动（回想一下，图上简单随机游动所对应的马尔可夫链为：每次都是向一个邻接的顶点移动，且向各个邻接顶点移动的概率是相同的.）



36

(a) 从长远来看，质点处在点 A 的时间所占的比例为多少？

(b) 假设质点从点 A 开始游动，那么质点回到 A 的期望步数为多少？

(c) 假设质点从点 C 开始游动，那么质点到达 A 之前访问 B 的期望次数为多少？

(d) 假设质点从点 B 开始游动，那么质点在到达 C 之前到达 A 的概率为多少？

(e) 再次假设质点从点 C 开始游动，那么质点到达 A 所需的期望步数为多少？

1.9 考虑状态空间 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的一个马尔可夫链，转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) 该马尔可夫链是否为不可约的？

(b) 该马尔可夫链的周期是多少？

(c) 求 $p_{1\,000}(2, 1)$，$p_{1\,000}(2, 2)$，$p_{1\,000}(2, 4)$(近似值).

(d) 令 T 为始于状态 1 又回到状态 1 的首返时刻. 求 T 的分布以及 $\mathbf{E}(T)$. 进一步说，不通过其他的计算，是否可以直接得到 $\pi(1)$ 的值？

(e) 求不变概率 $\bar{\pi}$，并利用其找出始于状态 2，又回到状态 2 所需要的期望时间.

1.10 设 X_n 为状态空间 {0，1，…，6} 上的一个马尔可夫链，其转移概率为

$$p(0,0)=\frac{3}{4},p(0,1)=\frac{1}{4},$$

$$p(1,0)=\frac{1}{2},p(1,1)=\frac{1}{4},p(1,2)=\frac{1}{4},$$

$$p(6,0)=\frac{1}{4},p(6,5)=\frac{1}{4},p(6,6)=\frac{1}{2},$$

同时，对于 $j=2，3，4，5$，有

$$p(j,0)=p(j,j-1)=p(j,j)=p(j,j+1)=\frac{1}{4}.$$

(a) 该马尔可夫链是否为不可约的？是否为非周期的？

37

(b) 假设该马尔可夫链已经进行了很长一段时间，现在我们开始观察该马尔可夫链，则在接下来的三个状态中，其次序分别为 4，5，0 的概率为多少？

(c) 假设该马尔可夫链的初始状态为 1，求其在到达状态 0 之前到达状态 6 的概率.

(d) 假设该马尔可夫链的初始状态为 3，求其再次到达状态 3 所需要的期望步数.

(e) 假设该马尔可夫链的初始状态为 0，求其到达状态 6 所需要的期望步数.

1.11 设 X_1，X_2，…为一个 6 面均匀的骰子独立抛掷得到的一个序列值，令 $S_n=X_1+\cdots+X_n$. 且令

$$T_1=\min\{n\geqslant 1: S_n \text{ 可以被 8 整除}\},$$

$$T_2=\min\{n\geqslant 1: S_n-1 \text{ 可以被 8 整除}\}.$$

求 $\mathbf{E}(T_1)$ 和 $\mathbf{E}(T_2)$.（提示：可以将 S_n 被 8 整除后的余数看做一个马尔可夫链.）

1.12 令 X_n，Y_n 是状态空间为 {0，1，2} 上的两个相互独立的马尔可夫链，转移矩阵均为

$$\boldsymbol{P}=\begin{matrix} & \begin{matrix}0 & 1 & 2\end{matrix} \\ \begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix} & \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{matrix}.$$

设 $X_0=0$，$Y_0=2$ 且令

$$T=\inf\{n:X_n=Y_n\}.$$

(a) 求 $\mathbf{E}(T)$.

(b) 求 $\mathbf{P}\{X_T=2\}$.

(c) 从长远来看，两个马尔可夫链处于相同状态的时间所占的比例为多少？

[提示：可以考虑九状态马尔可夫链 $Z_n=(X_n，Y_n)$.]

1.13 考虑习题 1.1 中的马尔可夫链.

(a) 经过很长一段时间后，堆放起来的报纸数的期望值为多少？

38

(b) 假设一开始报纸堆中有 0 张报纸，求其再次回到状态 0 的期望时间.

1.14 设 X_n 是状态空间 {1，2，3，4，5} 上的一个马尔可夫链，其转移矩阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) 该马尔可夫链是否为不可约的？是否为非周期的？

(b) 求不变概率向量.

(c) 假设该马尔可夫链开始处于状态 1，求其再次回到状态 1 所需要的期望步数.

(d) 同样设 $X_0=1$，求该马尔可夫链到达状态 4 所需要的期望步数.

(e) 还是设 $X_0=1$，那么该马尔可夫链在进入状态 3 之前进入状态 5 的概率为多少？

1.15 令 X_n 为状态空间 S 上的一个不可约马尔可夫链，其初始状态为 i 且转移矩阵为 $\boldsymbol{P}$. 令

$$T = \min\{n > 0 : X_n = i\}$$

为状态 i 的首次返回时刻. 对每个状态 j，令 $r(j)$ 为其返回 i 之前访问 j 的期望次数，

$$r(j) = \mathbf{E}\Big[\sum_{n=0}^{T-1} I\{X_n = j\}\Big].$$

注意到 $r(i)=1$.

(a) 令 $\bar{r}$ 为第 j 个分量为 $r(j)$ 的向量，证明：$\bar{r}\boldsymbol{P}=\bar{r}$.

(b) 证明：

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{j\in S} r(j).$$

(c) 推导 $\mathbf{E}(T)=\pi(i)^{-1}$，其中 $\bar{\pi}$ 为不变概率.

1.16 考虑如 1.6 节所述的从 0 开始的圆 $\{0, 1, \cdots, N-1\}$ 上的简单随机游动，证明：X_{T_N} 服从 $\{1, 2, \cdots, N-1\}$ 上的均匀分布.

39

1.17 $\{1, \cdots, N\}$ 上的完全图是指任意两个不同顶点都相邻的简单图，以 X_n 表示该图上的简单随机游动，且令 T 为质点首次到达状态 1 的时刻.

(a) 设 $X_0=1$，求 T 的分布. 对于此马尔可夫链，证明 (1.11).

(b) 求 $\mathbf{E}[T \mid X_0=2]$.

(c) 求使得每个点都至少被访问一次所需步数的期望值.

1.18 假设我们有一副含 52 张牌的标准扑克牌，并按 1.6 节所述的程序洗牌，设每秒移动一次，求牌的次序再次回到原来状态所需要的期望年数.

1.19 假设重复抛掷一枚均匀的硬币，直到连续 4 次出现头像朝上的结果为止，则需要抛掷的次数的期望值为多少？[提示：考虑状态空间 $\{0, 1, \cdots, 4\}$ 上的一个马尔可夫链.]

1.20 此题我们将简略证明与所有元素均为正的矩阵有关的佩龙-弗罗贝尼乌斯定理. 令 $\mathbf{A}=$

(a_{ij}) 为 $N\times N$ 阶矩阵，且对任意 i，j 有 $a_{ij}>0$，对于向量 $\overline{u}=(u^1,\cdots,u^N)$ 以及 $\overline{v}=(v^1,\cdots,v^N)$，对任意的 i，如果 $u^i\geqslant v^i$，则记作 $\overline{u}\geqslant\overline{v}$；如果 $u^i>v^i$，则记作 $\overline{u}>\overline{v}$. 定义 $\overline{0}=(0,\cdots,0)$.

(a) 证明：如果 $\overline{v}\geqslant\overline{0}$ 且 $\overline{v}\neq\overline{0}$，则 $A\overline{v}>\overline{0}$.

对任意向量 $\overline{v}\geqslant\overline{0}$，令 $g(\overline{v})$ 为使得

$$\boldsymbol{A}\overline{v}\geqslant\lambda\overline{v}$$

的最大的 λ.

(b) 证明：对任意非零向量 $\overline{v}\geqslant\overline{0}$ 有 $g(\overline{v})>0$，且如果 $c>0$，则 $g(c\overline{v})=g(\overline{v})$.

令

$$\alpha=\sup g(\overline{v}),$$

其中上确界在满足条件 $\overline{v}\geqslant 0$ 的所有 $\overline{v}$ 上选取．由（b）可将此上确界看做在满足条件

$$\|v\|=\sqrt{(v^1)^2+\cdots+(v^N)^2}=1$$

的所有 v 上选取．根据函数 g 在 $\{\|v\|=1\}$ 上的连续性，可以证明至少存在一个向量 $\overline{v}\geqslant\overline{0}$ 使得 $g(\overline{v})=\alpha$.

(c) 证明：对任意满足 $g(\overline{v})=\alpha$ 的 $\overline{v}$ 有

$$\boldsymbol{A}\overline{v}=\alpha\overline{v},$$

即 $\overline{v}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 α 的特征向量．[提示：由定义可知 $\boldsymbol{A}\overline{v}\geqslant\alpha\overline{v}$. 假设两者不相等，考虑 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{A}\overline{v}-\alpha\overline{v}]$，利用（a）.]

40

(d) 证明：存在唯一满足 $g(\overline{v})=\alpha$ 的 $\overline{v}\geqslant\overline{0}$，使得 $\sum_{i=1}^{N}v^i=1$.

[提示：设存在两个这样的向量 $\overline{v}_1$，$\overline{v}_2$，考虑 $g(\overline{v}_1-\overline{v}_2)$ 以及 $g(|\overline{v}_1-\overline{v}_2|)$，其中 $|\overline{v}|=(|v^1|,\cdots,|v^n|)$.]

(e) 证明：满足（c）中 $\overline{v}$ 的所有元素都是严格正的．[提示：如果 $\boldsymbol{A}\overline{v}\geqslant\lambda\overline{v}$，那么 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\overline{v})\geqslant\lambda\boldsymbol{A}\overline{v}$.]

(f) 证明：如果 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的其他任意一个特征值，那么有 $|\lambda|<\alpha$. [提示：假设 $\boldsymbol{A}\overline{u}=\lambda\overline{u}$，考虑 $\boldsymbol{A}|\overline{u}|$.]

(g) 证明：如果 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 $(N-1)\times(N-1)$ 阶子矩阵，那么 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值的绝对值均严格小于 α. [提示：由于 $\boldsymbol{B}$ 的所有元素均为正，可将（a）～（f）运用于 $\boldsymbol{B}$.]

(h) 考虑

$$f(\lambda)=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}).$$

证明：

$$f'(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\det(\boldsymbol{B}_i-\lambda\boldsymbol{I}),$$

其中 $\boldsymbol{B}_i$ 是从 $\boldsymbol{A}$ 中除去第 i 行以及第 i 列之后得到的子矩阵.

(i) 利用（g）和（h）推导

$$f'(\alpha) > 0,$$

因此 α 是 $\mathbf{A}$ 的单特征值.

(j) 解释为什么任意一个所有元素都为严格正的矩阵都存在唯一不变概率，且这一概率的所有元素均为正.（可将以上所有结果应用于该矩阵的转置矩阵.）

1.21 数论中有这样一个基本定理：如果两个整数 m 和 n 互素（即最大公约数为 1），那么存在正整数 x 和 y（可正可负），使得

$$mx + ny = 1.$$

利用这一定理证明：

(a) 如果 m 和 n 互素，那么集合

$$\{mx+ny: x, y \text{ 均为正整数}\}$$

包含除有限个正整数以外的所有整数.

(b) 令 J 是由一些非负整数构成的集合，这些整数的最大公约数为 d. 还假设 J 对加法封闭，即 $m, n\in J\Rightarrow m+n\in J$. 那么 J 包含 $\{0, d, 2d, \cdots\}$ 中除有限个整数以外的所有元素.

41

第 2 章　可数马尔可夫链

2.1　引言

在本章中，我们考虑状态空间为可数无限集的（时齐）马尔可夫链．如果一个集合与非负整数集 $\{0,1,2,\cdots\}$ 一一对应，就称它为可数无限集．例如，这样的集合有：$\mathbf{Z}$，所有整数构成的集合；$2\mathbf{Z}$，偶数集；$\mathbf{Z}^2$，平面上的格点集合，即

$$\mathbf{Z}^2 = \{(i,j): i,j \text{ 均为整数}\}.$$

（希望读者思考 $\mathbf{Z}^2$ 与 $\{0,1,2,\cdots\}$ 是如何一一对应的．）并不是所有的无限集合都是可数无限的，例如，实数集就不能和正整数集一一对应．

我们同样令 X_n 表示一个马尔可夫链．对有限状态空间马尔可夫链描述的一些结论同样适用于无限的情形，不过，有些时候情况会变得相对复杂些．我们同样可以考虑转移矩阵，但是这种情形下，它为无限的矩阵．所以在这里，我们并不使用矩阵符号表示它，只是简单地写出转移概率，即

$$p(x,y) = \mathbf{P}\{X_1 = y \mid X_0 = x\}, \quad x,y \in S.$$

其中转移概率均为非负，并且每“行”的概率之和为 1，即对于每个 $x \in S$，有

$$\sum_{y\in S} p(x,y) = 1.$$

我们用 x，y，z 表示状态空间 S 中的元素，同样定义 n 步转移概率为

$$p_n(x,y) = \mathbf{P}\{X_n = y \mid X_0 = x\}.$$

若 $0<m$，$n<\infty$，那么有

$$\begin{aligned} p_{m+n}(x,y) &= \mathbf{P}\{X_{m+n} = y \mid X_0 = x\} \\ &= \sum_{z\in S} \mathbf{P}\{X_{m+n} = y, X_m = z \mid X_0 = x\} \\ &= \sum_{z\in S} p_m(x,z)p_n(z,y). \end{aligned}$$

这个方程有时也称为查普曼-柯尔莫戈洛夫方程．它可以被看做无限矩阵的矩阵乘法定义．

例 1　**在 0 点处带部分反射壁的随机游动．** 令 $0<p<1$，$S=\{0,1,2,\cdots\}$．

0　1　2　3　4

转移概率由如下形式给出：

$$p(x,x-1) = 1-p, \quad p(x,x+1) = p, \quad x > 0,$$

以及

$$p(0,0) = 1-p, \quad p(0,1) = p.$$

例 2　**整格点上的简单随机游动．** 令 $\mathbf{Z}^d$ 为 d 维整数格点集，即

$$\mathbf{Z}^d = \{(z_1,\cdots,z_d) : z_i \in \mathbf{Z}\}.$$

注意到 $\mathbf{Z}^d$ 中的每个元素 x 在 $\mathbf{Z}^d$ 中都有 $2d$ 个与之距离为 1 的“最近邻”．$\mathbf{Z}^d$ 上的简单随机游

动是指过程 X_n，它在 $\mathbf{Z}^d$ 中取值，并且它每次移动都尽可能地到其当前位置的 $2d$ 个最近邻之一的位置. 更精确地，即它表示状态空间为 $S=\mathbf{Z}^d$ 的马尔可夫链，且

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2d}, & 若 \mid x-y\mid=1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例 3 **排队模型**. 令 X_n 表示在某服务系统中等待的顾客数. 我们认为队列中的第一个顾客得到服务而其他顾客则排队等待，在每个时间间隔内一位新顾客到达的概率为 p，第一个顾客的服务结束并且顾客离开队列的可能性为 q. 我们并不限制排队等候的顾客数. 这就是一个马尔可夫链，其状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率（见 1.1 节中的例 2）为

44

$$p(x,x-1)=q(1-p),\quad p(x,x)=qp+(1-q)(1-p),$$
$$p(x,x+1)=p(1-q),\quad x>0;$$
$$p(0,0)=1-p,\quad p(0,1)=p.$$

在有限马尔可夫链中，我们的目标是理解极限行为. 在有限马尔可夫链中的一些概念同样适合于无限情形. 例如，互通类的概念. 同样，若一个马尔可夫链的所有状态是互通的，则称它为不可约的. 本章讨论的所有例子除了少数情形外都是不可约的，这里的少数情形指除了吸收状态 x 外的所有状态都是互通的，即 $p(x,x)=1$. 我们同样也可以讨论不可约马尔可夫链的周期. 上面的例 1 和例 3 都是非周期的，而例 2 中马尔可夫链的周期为 2. 然而无限状态空间下的不可约、非周期马尔可夫链并不是总收敛到平稳的概率分布.

2.2 常返和非常返

假定 X_n 为一个不可约的马尔可夫链，其状态空间 S 为可数无限的，转移概率为 $p(x,y)$，若对于每一个状态 x 都有

$$\mathbf{P}\{有无限多个\ n,使得\ X_n=x\}=1$$

成立，则称 X_n 为常返（recurrent）链，即此马尔可夫链可以返回到 x 无限多次. 若一个不可约马尔可夫链可以返回到固定状态 x 无限多次，那么它也可以访问其他状态无限多次.（根本原因在于，若 y 为另一状态，则存在一个正的概率从 x 可以到达 y. 如果该马尔可夫链可以访问 x 无限多次，如此反复，那么它也将到达 y 无限多次. 即若某特定事件发生的概率为正，那么当我们进行无限次试验时，此事件将会发生无限次.）如果该马尔可夫链不是常返的，则返回到每个状态的次数是有限的. 在这种情形下，称该马尔可夫链为非常返的. 对于一个给定的马尔可夫链，并不容易判断其是常返的还是非常返的. 在本节中，我们将给出两条准则来判定这一问题.

45

固定某一状态 x，并且假定 $X_0=x$，考虑随机变量 R 为访问 x 的总的次数，包括在 0 时刻的访问. R 可以表示为

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}I\{X_n=x\},$$

这里同样用 I 表示示性函数，即当事件发生时，$I=1$，其他情况为 0. 若考虑的马尔可夫链为常返的，则 R 恒等于无穷大；若所考虑的马尔可夫链为非常返的，则 R 以概率 1 小于∞. 假

定 $X_0=x$，我们可以计算 R 的期望

$$\mathbf{E}(R)=\mathbf{E}\sum_{n=0}^{\infty}I\{X_n=x\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X_n=x\}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,x).$$

现在用另一种方式计算 $\mathbf{E}(R)$. 设 T 为首次返回到 x 的时间，

$$T=\min\{n>0: X_n=x\}.$$

若所考虑的马尔可夫链永远不返回到 x，则 $T=\infty$. 假定 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$，那么该马尔可夫链以概率 1 经常返回到状态 x，如此继续，我们可以知道该马尔可夫链无限次返回到 x 的概率为 1，则该马尔可夫链为常返的. 假定 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=q<1$，我们根据 q 来计算 R 的分布. 首先 $R=1$ 当且仅当所考虑的马尔可夫链从来不返回到 x，因此 $\mathbf{P}\{R=1\}=1-q$. 若 $m>1$，则 $R=m$ 当且仅当该马尔可夫链返回到状态 x 为 $m-1$ 次且不会返回第 m 次. 因此 $\mathbf{P}\{R=m\}=q^{m-1}(1-q)$. 所以，在非常返情形中，$q<1$，

$$\mathbf{E}(R)=\sum_{m=1}^{\infty}m\mathbf{P}\{R=m\}=\sum_{m=1}^{\infty}mq^{m-1}(1-q)=\frac{1}{1-q}<\infty.$$

我们得到以下结论：

结论 一个不可约马尔可夫链是非常返的当且仅当返回到某一状态的期望值为有限值，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,x)<\infty.$$

例 **$\mathbf{Z}^d$ 上的简单随机游动.** 首先取定 $d=1$，并考虑取值为整数的马尔可夫链，转移概率为

$$p(x,x+1)=p(x,x-1)=\frac{1}{2}.$$

46

我们集中考虑 $x=0$ 的状态，并且假定 $X_0=0$. 由于此马尔可夫链的周期为 2，那么对于奇数 n，有 $p_n(0,0)=0$. 我们接下来要写下 $p_{2n}(0,0)$ 的准确表达式. 假定质点在 $2n$ 步后处于位置 0，则质点必须是向右走了 n 步，向左走了 n 步. 任意长度为 $2n$ 且 n 步向右和 n 步向左的"路径"都具有相同结果.

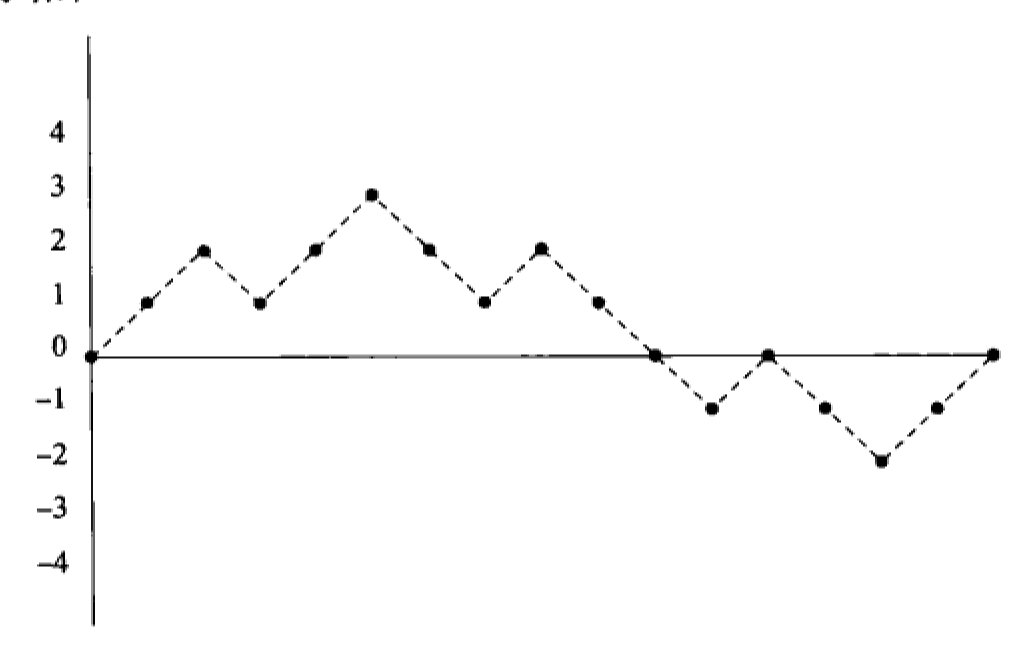


图 2.1 16 步后到达原点的随机游动路径图

既然它包含了 $2n$ 个发生概率为$\frac{1}{2}$的事件，则每个这样的路径的发生概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. 从 $2n$ 步中选择 n 步向右，剩下的 n 步向左，共有$\binom{2n}{n}$种不同的方式，因此，

$$p_{2n}(0,0)=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

当 n 很大时，并不容易看出 $p_{2n}(0,0)$ 的表现形式. 然而，我们可以利用斯特林（Stirling）公式估计阶乘. 斯特林公式（见习题 2.18）为

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n},$$

[47] 其中～意味着当 n 趋于∞时，它两边的比率接近 1. 若将此式代入上面的表达式，则得

$$p_{2n}(0,0)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \tag{2.1}$$

特别地，因为$\sum n^{-\frac{1}{2}}=\infty$，所以

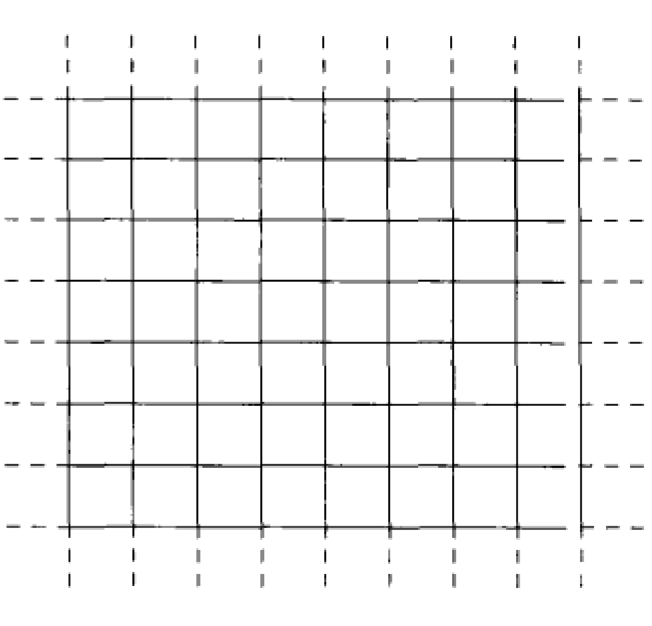
$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{2n}(0,0)=\infty,$$

一维上的简单随机游动是常返的.

现在讨论 $d>1$，此时该马尔可夫链的状态空间为 d 维整数格点 $\mathbf{Z}^d$ 且转移概率为

$$p(x,y)=\frac{1}{2d},\quad |x-y|=1.$$

同样令游动起始位置为 $0=(0,\cdots,0)$. 我们尝试得到 $p_{2n}(0,0)$ 的渐近表达式（同样，对奇数 n，有 $p_n(0,0)=0$）. 在此种情形下，组合数有些复杂，所以我们将仅仅给出简要的推导过程. 假定质点移动了 $2n$ 步. 依据大数定律，对于非常大的 n，我们期望在每一维上移动的步数为$\frac{2n}{d}$. 若有机会在移动 n 步后到达 0，则需要在每一维上的移动步数都为偶数. 对大的 n，此事件发生的概率大约为$\left(\frac{1}{2}\right)^{d-1}$（在前 $d-1$ 维的每一维上是否移动了偶数步几乎是独立事件，然 [48] 而，我们知道若前 $d-1$ 维移动了偶数步，因为总的移动步数为偶数，所以最后一维上的移动也是偶数步.）在每一维上，若移动了大约$\frac{2n}{d}$步，则由 (2.1) 我们预期每一维到达 0 点的概率大约为$\left(\frac{n\pi}{d}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 结合此结果，我们可得渐近表达式


图 2.2 $\mathbf{Z}^2$ 格点

$$p_{2n}(0,0)\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{d-1}\left(\frac{d}{n\pi}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

回忆一下，当且仅当 $a>1$ 时$\sum n^{-a}<\infty$. 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}(0,0) = \begin{cases} = \infty & d = 1,2, \\ < \infty & d \geqslant 3. \end{cases}$$

我们已推导出如下结论.

结论 当 $d=1$ 或 2 时，$\mathbf{Z}^d$ 上的简单随机游动为常返的，当 $d \geqslant 3$ 时为非常返的.

现在考虑另一种判定常返或非常返的方法. 假设 X_n 是一个不可约的马尔可夫链，考虑一个固定的状态，我们标记为 z. 对于每个状态 x，令

$$\alpha(x) = \mathbf{P}\{X_n = z, \text{对某些 } n \geqslant 0 \mid X_0 = x\}.$$

显然 $\alpha(z)=1$. 若该马尔可夫链为常返的，则对所有的 x 都有 $\alpha(x)=1$. 然而，若该马尔可夫链是非常返的，则必存在 x，使得 $\alpha(x)<1$. 尽管没有那么明显，但事实上若该马尔可夫链为非常返的，那么无论怎样减小 $\alpha(x)$，总存在距离 z "越来越远" 的点 x.

若 $x \neq z$，则

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \mathbf{P}\{X_n = z, \text{对某些 } n \geqslant 0 \mid X_0 = x\} \\ &= \mathbf{P}\{X_n = z, \text{对某些 } n \geqslant 1 \mid X_0 = x\} \\ &= \sum_{y \in S} \mathbf{P}\{X_1 = y \mid X_0 = x\} \mathbf{P}\{X_n = z, \text{对某些 } n \geqslant 1 \mid X_1 = y\} \\ &= \sum_{y \in S} p(x,y)\alpha(y). \end{aligned}$$

总之，$\alpha(x)$ 满足如下条件：

$$0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1, \tag{2.2}$$

$$\alpha(z) = 1, \quad \inf\{\alpha(x) : x \in S\} = 0, \tag{2.3}$$

以及

$$\alpha(x) = \sum_{y \in S} p(x,y)\alpha(y), \quad x \neq z. \tag{2.4}$$

49

这表明若 X_n 是非常返的，则 (2.2)～(2.4) 存在唯一解，且对应于适当的概率. 另外，可证明若 (2.2)～(2.4) 无解，则 X_n 是常返的（我们将在 5.5 节例 5 中证明此结论）. 这给出了判定常返或非常返的另一种方法.

结论 一个不可约的马尔可夫链是非常返的当且仅当对任意的 z 都能找到满足 (2.2)～(2.4) 的函数 $\alpha(x)$.

例 考虑前一节中的例 1，即带有部分反射壁的随机游动. 令 $z=0$，尝试求出 (2.2)～(2.4) 的一个解. 第三个方程表述为

$$\alpha(x) = (1-p)\alpha(x-1) + p\alpha(x+1), \quad x > 0.$$

由 (0.5) 和 (0.6) 得出上述方程的解的唯一形式为

$$\alpha(x) = c_1 + c_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^x, \quad p \neq \frac{1}{2},$$

$$\alpha(x) = c_1 + c_2 x, \quad p = \frac{1}{2}.$$

从 (2.3) 的第一个条件得 $\alpha(0)=1$；将此代入上式，

$$\alpha(x) = (1 - c_2) + c_2\left(\frac{1-p}{p}\right)^x, \quad p \neq \frac{1}{2}, \tag{2.5}$$

$$\alpha(x) = 1 + c_2 x, \quad p = \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

若选择 $c_2=0$，则对所有的 x 都有 $\alpha(x)=1$，显然不满足（2.3）. 若 $p=\frac{1}{2}$ 且 $c_2\neq 0$，则解无界，因此不满足（2.2）. 类似地，若 $p<\frac{1}{2}$，则当 $c_2\neq 0$ 时，（2.5）的解无界. 在这种情形下，我们得出当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，该马尔可夫链为常返的. 当 $p>\frac{1}{2}$ 时，我们可以求出一个解.（2.3）中的第二个条件本质上归结为当 $x\to\infty$ 时，$\alpha(x)\to 0$，我们得到

$$\alpha(x) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

因此，当 $p>\frac{1}{2}$ 时，该马尔可夫链为非常返的.

2.3 正常返和零常返

[50] 假定 X_n 是无限状态空间 S 上的一个不可约、非周期的马尔可夫链. 在这一节我们将研究什么情况下极限概率分布存在. 所谓极限概率 $\pi(x)$（$x\in S$），是指 S 上的一个概率分布，使得对每一个 x，$y\in S$，

$$\lim_{n\to\infty} p_n(y,x) = \pi(x).$$

若 X_n 为非常返的，则对所有的 x，y，

$$\lim_{n\to\infty} p_n(y,x) = 0, \tag{2.7}$$

所以 X_n 不存在极限概率分布. 然而对于一些常返链，（2.7）也可能成立. 例如，考虑上节描述的 $\mathbf{Z}$ 上的简单随机游动（事实上，它是一个周期链，但如果做些小的修改，它可以变成一个非周期的例子）. 它是常返的，但是当 $n\to\infty$ 时，$p_{2n}(0,0)\to 0$. 若马尔可夫链为常返的，且

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0,$$

则称该马尔可夫链为**零常返的**（null recurrent）. 否则，一个常返链称为**正常返的**（positive recurrent）.

正常返马尔可夫链有着同有限马尔可夫链相似的性质. 若 X_n 为一个不可约、非周期的正常返马尔可夫链，则对每一个 x，y，极限

$$\lim_{n\to\infty} p_n(y,x) = \pi(x) > 0$$

存在，且独立于初始状态 y. 此 $\pi(x)$ 称为 S 上的不变概率分布，即

$$\sum_{y\in S}\pi(y)p(y,x) = \pi(x). \tag{2.8}$$

再者，若返回到一个状态 x 的时间为

$$T = \min\{n>0 \mid X_n = x\},$$

则对于一个正常返马尔可夫链，

$$\mathbf{E}(T \mid X_n = x) = \frac{1}{\pi(x)}.$$

若 X_n 是零常返的，则以概率 1 有 $T<\infty$，但 $\mathbf{E}(T)=\infty$；若 X_n 是非常返的，则以正概率有 $T=\infty$.

判定一个马尔可夫链是否为正常返的一种方法是尝试找到一个不变概率分布．可以证明若一个不可约马尔可夫链是正常返的，则存在满足（2.8）的唯一的概率分布．再者，若一个马尔可夫链不是正常返的，则不存在满足（2.8）的概率分布．这里给出了一个好的准则：尝试找到不变概率分布．若其存在，则该马尔可夫链为正常返的；若不存在，则该马尔可夫链为零常返的或非常返的．51

例 再次考虑带有部分反射壁的随机游动的例子．我们将尝试找到满足（2.8）的不变概率分布，即非负函数 $\pi(x)$ 满足（2.8）且

$$\sum_{x\in S}\pi(x) = 1. \tag{2.9}$$

在这个例子中，由（2.8）给出

$$\pi(x+1)(1-p)+\pi(x-1)p = \pi(x), \quad x>0, \tag{2.10}$$

$$\pi(1)(1-p)+\pi(0)(1-p) = \pi(0). \tag{2.11}$$

由（0.5）和（0.6），（2.10）的通解为

$$\pi(x) = c_1 + c_2\left(\frac{p}{1-p}\right)^x, \quad p\neq\frac{1}{2},$$

$$\pi(x) = c_1 + c_2 x, \quad p=\frac{1}{2}.$$

从等式（2.11）得 $\pi(0)=[(1-p)/p]\pi(1)$，将此条件加入到上式，得

$$\pi(x) = c_2\left(\frac{p}{1-p}\right)^x, \quad p\neq\frac{1}{2},$$

$$\pi(x) = c_1, \quad p=\frac{1}{2}.$$

现在加上条件（2.9）：我们能否选择 c_1 或 c_2，使得 $\sum\pi(x)=1$？当 $p=\frac{1}{2}$ 时，显然不行．假定 $p\neq\frac{1}{2}$，显然我们需要 $c_2\neq 0$．若 $p>\frac{1}{2}$，$\sum\left(\frac{p}{1-p}\right)^x=\infty$，则不可能找到满足条件的 c_2（我们已经知道在这样的情形下该马尔可夫链为非常返，所以它不可能为正常返的）．然而若 $p<\frac{1}{2}$，和为有限的，并且我们可以选择

$$\pi(x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x\left[\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{p}{1-p}\right)^y\right]^{-1} = \left(\frac{1-2p}{1-p}\right)\left(\frac{p}{1-p}\right)^x.$$

在这种情形下，该马尔可夫链为正常返，且这里给出了不变概率．总结上两节的讨论，关于带部分反射壁的随机游动，我们有如下结论：

$$\text{当 } p<\frac{1}{2} \text{ 时，} \quad \text{正常返，}$$

$$当\ p=\frac{1}{2}\ 时，\quad 零常返，$$

52

$$当\ p>\frac{1}{2}\ 时，\quad 非常返.$$

2.4 分支过程

本节将研究群体增长的随机模型. 考虑一些个体组成的群体. 令 X_n 为时刻 n 时此群体中的个体数. 在每个时间间隔内，群体依下面规则变化：每个个体产生后代的个数都是随机的，个体产生后代后，它自身的生命结束，离开群体. 我们对产生后代的过程做两个假定：

1. 每个个体产生后代的个数服从相同的概率分布：一个个体恰好产生 k 个后代的概率为 p_k，已知概率 p_0，p_1，p_2，…非负，且和为 1.
2. 各个个体产生后代的个数是相互独立的.

群体第 n 代的个体数 X_n 是一个马尔可夫链，其状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}$. 记 0 为吸收状态；一旦群体灭绝，不会再有个体产生. 该马尔可夫链的确切的转移概率不容易写出. 假定 $X_n=k$. 则 k 个个体产生的后代形成第 $n+1$ 代个体. 若 $Y_1,\cdots,Y_k$ 为独立的随机变量，且每个变量的分布为 $\mathbf{P}\{Y_i=j\}=p_j$，则

$$p(k,j)=\mathbf{P}\{X_{n+1}=j\mid X_n=k\}=\mathbf{P}\{Y_1+\cdots+Y_k=j\}.$$

$Y_1+\cdots+Y_k$ 的实际分布可以根据卷积公式求出，但是这里我们不需要知道它的确切分布形式. 令 μ 表示每个个体产生后代的均值，则

$$\mu=\sum_{i=0}^{\infty}ip_i.$$

那么

$$\mathbf{E}(X_{n+1}\mid X_n=k)=\mathbf{E}(Y_1+\cdots+Y_k)=k\mu.$$

可以相对简单地计算出个体数的均值 $\mathbf{E}(X_n)$：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_n)&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X_{n-1}=k\}\mathbf{E}(X_n\mid X_{n-1}=k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}k\mu\mathbf{P}\{X_{n-1}=k\}=\mu\mathbf{E}(X_{n-1}).\end{aligned}$$

或者，若重复做 n 次，则得

53

$$\mathbf{E}(X_n)=\mu^n\mathbf{E}(X_0).$$

从这个表达式可得到一些有趣的结论. 若 $\mu<1$，则当 n 很大时，后代个数的均值接近于 0. 简单估计

$$\mathbf{E}(X_n)=\sum_{k=0}^{\infty}k\mathbf{P}\{X_n=k\}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{X_n=k\}=\mathbf{P}\{X_n\geqslant 1\}$$

可用来推导出群体最终会灭绝，即

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{X_n=0\}=1.$$

若 $\mu=1$，则期望群体规模保持不变，而当 $\mu>1$ 时，期望群体规模会逐渐变大. 在这些情形中

并不能很清楚地看出群体是否以概率 1 灭绝.（尽管 $\mathbf{E}(X_n)$ 不太小，但 X_n 有可能以非常接近 1 的概率达到 0）下面我们将研究如何确定群体灭绝的概率. 为了避免平凡情况，假定

$$p_0 > 0; \quad p_0 + p_1 < 1. \tag{2.12}$$

令

$$a_n(k) = \mathbf{P}\{X_n = 0 \mid X_0 = k\}$$

并且令 $a(k)$ 为假定最初有 k 个个体时群体最终灭绝的概率，即

$$a(k) = \lim_{n\to\infty} a_n(k).$$

若群体在某个时刻有 k 个个体，那么群体灭绝的唯一方法是这 k 个分支都灭绝. 既然各个分支的行为是相互独立的，

$$a(k) = [a(1)]^k.$$

所以只需考虑 $a(1)$，将 $a(1)$ 简记为 a，称为*消亡概率*（extinction probability). 现假定 $X_0 = 1$，若仅考虑一代，则得

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{P}\{\text{群体消亡} \mid X_0 = 1\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X_1 = k \mid X_0 = 1\}\mathbf{P}\{\text{群体消亡} \mid X_1 = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k a(k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k a^k. \end{aligned}$$

等式右边会引起足够的兴趣，并给予命名. 若 X 是一个在 $\{0,1,2,\cdots\}$ 中取值的随机变量，则 X 的*母函数*（generating function）为函数

$$\phi(s) = \phi_X(s) = \mathbf{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbf{P}\{X = k\}.$$

54

注意到当 $s \geqslant 0$ 时，$\phi(s)$ 是关于 s 的增函数，且有 $\phi(0) = \mathbf{P}\{X=0\}$，$\phi(1)=1$. 求导，我们可得

$$\phi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} \mathbf{P}\{X = k\},$$

$$\phi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} \mathbf{P}\{X = k\}.$$

因此，

$$\phi'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}\{X = k\} = \mathbf{E}(X), \tag{2.13}$$

且对于 $s>0$，若 $\mathbf{P}\{X \geqslant 2\} > 0$，

$$\phi''(s) > 0. \tag{2.14}$$

若 $X_1, \cdots, X_m$ 是取值为非负整数的独立随机变量，则

$$\phi_{X_1+\cdots+X_m}(s) = \phi_{X_1}(s)\cdots\phi_{X_m}(s).$$

证明上述等式的最简单的方法是利用表达式 $\phi_X(s) = \mathbf{E}(s^X)$ 和独立随机变量的乘法法则.

回到分支过程，我们已知消亡概率 a 满足方程

$$a = \phi(a).$$

显然，$a=1$ 满足方程，但可能还有其他解. 我们再次假定 $X_0 = 1$，随机变量 X_0 的母函数为 a，

X_1 的母函数为 $\phi(a)$. 令 $\phi^n(a)$ 为 X_n 的母函数，我们将证明

$$\phi^n(a) = \phi(\phi^{n-1}(a)).$$

为此，首先注意到

$$\begin{aligned}\phi^n(a) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X_n = k\}a^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X_1 = j\}\mathbf{P}\{X_n = k \mid X_1 = j\}\Big]a^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}p_j\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X_{n-1} = k \mid X_0 = j\}a^k.\end{aligned}$$

55

现在，若 $X_0=j$，那么 X_{n-1} 可以表示为 j 个独立的随机变量之和，且每一个随机变量的分布等同于给定 $X_0=1$ 时 X_{n-1} 的分布. 因此，对 k 求和得到的是 j 个独立随机变量之和的母函数，其中每个变量的母函数为 $\phi^{n-1}(a)$，因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X_{n-1} = k \mid X_0 = j\}a^k = [\phi^{n-1}(a)]^j,$$

$$\phi^n(a) = \sum_{j=0}^{\infty}p_j[\phi^{n-1}(a)]^j = \phi(\phi^{n-1}(a)).$$

我们现在利用递归的方法得到 $\phi^n(a)$，因此可得

$$a_n(1) = \mathbf{P}\{X_n = 0 \mid X_0 = 1\} = \phi^n(0).$$

我们已准备好证明如下结论：消亡概率 a 是方程 $a=\phi(a)$ 的最小正数解. 我们已知 a 必须满足此方程. 令 $\hat{a}$ 为最小正数解. 我们将利用归纳法证明对每一个 n，都有 $a_n=\mathbf{P}\{X_n=0\}\leqslant\hat{a}$（暗含着 $a=\lim a_n\leqslant\hat{a}$）. 因为 $a_0=0$，显然当 $n=0$ 时结论成立. 假设 $a_{n-1}\leqslant\hat{a}$，则

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = \phi^n(0) = \phi(\phi^{n-1}(0)) = \phi(a_{n-1}) \leqslant \phi(\hat{a}) = \hat{a}.$$

上式中的不等式是依据 ϕ 为增函数的事实得出的.

例 1 令 $p_0=\frac{1}{4}$，$p_1=\frac{1}{4}$，$p_2=\frac{1}{2}$，则 $\mu=\frac{5}{4}$，且

$$\phi(a) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a^2.$$

求解 $a=\phi(a)$，得 $a=1$，$\frac{1}{2}$. 消亡概率为 $\frac{1}{2}$.

例 2 令 $p_0=\frac{1}{2}$，$p_1=\frac{1}{4}$，$p_2=\frac{1}{4}$，则 $\mu=\frac{3}{4}$，且

$$\phi(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a^2.$$

求解 $a=\phi(a)$，得 $a=1$，2. 消亡概率为 1（我们已证明了当 $\mu<1$ 时消亡概率为 1 的结论）.

例 3 令 $p_0=\frac{1}{4}$，$p_1=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{1}{4}$，则 $\mu=1$，且

56

$$\phi(a) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a^2.$$

求解 $a=\phi(a)$，得 $a=1$，1. 消亡概率为 1.

本章最后我们建立一个判定 a 是否小于 1 的准则. 我们已经知道当 $\mu<1$ 时，$a=1$. 假定 $\mu=1$，由（2.13），$\phi'(1)=1$，所以由（2.14），当 $s<1$ 时，$\phi'(s)<1$. 因此对于任意 $s<1$，

$$1-\phi(s)=\int_s^1\phi'(s)\mathrm{d}s<1-s,$$

即 $\phi(s)>s$. 因此，当 $\mu=1$ 时，消亡概率为 1. 这是一个有趣的结论：尽管期望群体规模保持为 1，但是群体消亡的概率增长为 1. 此结论的一个推论是在群体没有灭绝的条件下，群体的规模将随时间增大. 这表明，假如某人被告知一个群体在一个很大的时刻还没有灭绝，那么此人将预测该群体的规模很大.

现假定 $\mu>1$，则 $\phi'(1)>1$. 因此，必存在某个 $s<1$，使得 $\phi(s)<s$. 但 $\phi(0)>0$. 由一般的连续函数的结论可知，必存在 $a\in(0, s)$，使得 $\phi(a)=a$. 又因为对 $s\in(0, 1)$ 有 $\phi''(s)>0$，所以曲线为凸的，并且至多存在一个 $s\in(0, 1)$，使得 $\phi(s)=s$. 这种情形下，群体以一个正的概率永远生存下去. 总结上述结论，给出如下定理.

定理 若 $\mu\leqslant 1$ 且 $p_0>0$，则消亡概率 $a=1$，即群体最终灭绝. 若 $\mu>1$，则消亡概率 $a<1$，a 为方程

$$t=\phi(t),$$

的唯一解，其中 $t\in(0, 1)$.

2.5 习题

2.1 考虑排队模型（2.1 节例 3）. 当 p，q 取何值时，马尔可夫链为零常返的、正常返的、非常返的？

在正常返情形下，给出极限概率分布 π. 在平稳状态下，队列的平均长度是多少？

在非常返情形下，给出开始状态为 x 且马尔可夫链在某个时刻到达 0 的概率.

2.2 考虑如下的马尔可夫链，其状态空间为 $S=\{0,1,\cdots\}$. 给定一个正数序列 p_1，p_2，…且 $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$. 每当该马尔可夫链到达状态 0 时，它便依据概率 p_i 选择一个新状态. 每当该马尔可夫链不在状态 0 时，它便确定地每次向 0 的方向移动一步. 换句话说，该马尔可夫链有转移概率 57

$$p(x,x-1)=1,\quad x>0,$$
$$p(0,x)=p_x,\quad x>0.$$

既然该马尔可夫链能持续地返回 0，则该马尔可夫链是个常返链. 当 p_x 在何种条件下，该马尔可夫链为正常返？在这种情形下，极限概率分布 π 是什么？[提示：或许直接计算 $\mathbf{E}(T)$ 更为简单些，其中 T 是起始为 0 并第一次返回到 0 的时间.]

2.3 考虑状态空间为 $S=\{0,1,\cdots\}$ 的一个马尔可夫链，且转移概率为

$$p(x,x+1)=\frac{2}{3};\qquad p(x,0)=\frac{1}{3}.$$

证明：该马尔可夫链为正常返链，并给出极限概率 π.

2.4 考虑状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$ 的一个马尔可夫链，且转移概率为

$$p(x,x+2)=p,\quad p(x,x-1)=1-p,\quad x>0.$$
$$p(0,2)=p,\quad p(0,0)=1-p.$$

当 p 取何值时，该链是一个非常返链？

2.5 令 X_n 为状态空间 $\mathbf{Z}$ 上的一个马尔可夫链，转移概率为

$$p(n,n+1)=p,\quad p(n,n-1)=1-p,$$

其中 $p>\frac{1}{2}$. 假定 $X_0=0$.

(a) 令 $Y=\min\{X_0,X_1,\cdots\}$，Y 的分布是什么？

(b) 对正整数 k，令 $T_k=\min\{n:X_n=k\}$，且 $e(k)=\mathbf{E}(T_k)$. 解释 $e(k)=ke(1)$.

(c) 求出 $e(1)$（提示：(b) 或许有用）.

(d) 利用 (c) 得出另一结论：当 $p=\frac{1}{2}$时，$e(1)=\infty$.

2.6 假定 J_1，J_2，…为独立的随机变量且 $\mathbf{P}\{J_j=1\}=1-\mathbf{P}\{J_j=0\}=p$. 令 k 为一正整数，且 T_k 为首次连续 k 次出现 1 的时间. 换句话说，若 $J_n=J_{n-1}=\cdots=J_{n-(k-1)}=1$，则 $T_k=n$，且不存在 $m<n$，使得 $J_m=J_{m-1}=\cdots=J_{m-(k-1)}=1$. 令 $X_0=0$，对于 $n>0$，令 X_n 为最近的 1 连续出现的次数，即若 $J_{n-k}=0$ 且对于 $n-k<i\leqslant n$ 有 $J_i=1$，则 $X_n=k$.

(a) 解释 X_n 为什么是一个马尔可夫链，且状态空间为 {0, 1, 2, …}，并给出转移概率.

58

(b) 证明：该马尔可夫链为不可约的正常返链，并给出不变概率 π.

(c) 用 $\mathbf{E}[T_{k-1}]$ 来表示出 $\mathbf{E}[T_k]$，求解此递归方程，从而解出 $\mathbf{E}[T_k]$.

(d) 以不同的方式求 $\mathbf{E}[T_k]$. 假定该马尔可夫链的初始状态为 k，并令$\hat{T}_k$为直到返回状态 k 的时间，$\hat{T}_0$为该马尔可夫链直到返回状态 0 的时间. 解释为什么

$$\mathbf{E}[\hat{T}_k]=\mathbf{E}[\hat{T}_0]+\mathbf{E}[T_k],$$

求 $\mathbf{E}[\hat{T}_0]$，并利用 (b) 去求得 $\mathbf{E}[\hat{T}_k]$.

2.7 令 X_n 为状态空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的一个马尔可夫链. 对下面的每一个转移概率，表述该马尔可夫链是否为正常返、零常返或非常返. 若为正常返，给出平稳概率分布：

(a) $p(x,0)=\dfrac{1}{(x+2)}$，$p(x,x+1)=\dfrac{(x+1)}{(x+2)}$.

(b) $p(x,0)=\dfrac{(x+1)}{(x+2)}$，$p(x,x+1)=\dfrac{1}{(x+2)}$.

(c) $p(x,0)=\dfrac{1}{(x^2+2)}$，$p(x,x+1)=\dfrac{(x^2+1)}{(x^2+2)}$.

2.8 给定分支过程的后代分布如下，求消亡概率 a.

(a) $p_0=0.25$，$p_1=0.4$，$p_2=0.35$.

(b) $p_0=0.5$，$p_1=0.1$，$p_3=0.4$.

(c) $p_0=0.91$，$p_1=0.05$，$p_2=0.01$，$p_3=0.01$，$p_6=0.01$，$p_{13}=0.01$.

(d) $p_i=(1-q)q^i$，$0<q<1$.

2.9 考虑分支过程，其后代分布如习题 2.8 (b) 所示，令 $X_0=1$.

(a) 已知群体在第一代中不会灭绝（$X_1>0$），群体在第二代中灭绝的概率为多少？

(b) 已知群体不会在第二代中灭绝，群体在第三代灭绝的概率为多少？

2.10 考虑分支过程，其后代的分布由 $\{p_n\}$ 决定. 我们在该过程中加入下面的条件，使得该过程变成不可约马尔可夫链：群体一旦灭绝，下一代将会有一个新的个体.［换句话说，$p(0,1)=1$.］那么当 $\{p_n\}$ 取何值时，该马尔可夫链为正常返、零常返和非常返？

2.11 考虑下述分支过程的变化. 在每个时刻 n，每个个体依后代分布 $\{p_n\}$ 独立地产生后代子孙，且个体死亡概率为 q，$q\in(0,1)$. 这样，每个个体可以产生 j 次后代，其中 j 为个体的寿命. 当 q，$\{p_n\}$ 取何值时，群体最终的消亡概率为 1. 59

2.12 考虑分支过程，其中 $p_0=\frac{1}{3}$，$p_1=\frac{1}{3}$，$p_2=\frac{1}{3}$. 在电脑的辅助下，求群体在 n 步后灭绝的概率. 其中 $n=20$，100，200，1 000，1 500，2 000，5 000. 分别考虑 $p_0=0.35$，$p_1=0.33$，$p_2=0.32$ 和 $p_0=0.32$，$p_1=0.33$，$p_2=0.35$ 时的情况.

2.13 考虑一个生物群体依下述规则进行无性繁殖：每个个体出生后能存活足够长时间以繁殖后代的概率为 q. 若个体确实繁殖后代，则每次它以相等的概率繁殖 1 个或 2 个后代. 当这个个体不再繁殖后，则最终消亡. 假定群体最初有 4 个个体.

(a) 当 q 取何值时，能保证群体会最终灭绝.

(b) 若 $q=0.9$，则该群体永远存活下去的概率是多少？

2.14 令 X_n 是一个 $\mu>1$ 的分支过程中时刻 n 的个体数. 假定 $X_0=1$. 令 ϕ 为后代分布的母函数，并令 $a<1$ 为消亡概率.

(a) 解释为什么 $\phi'(a)<1$.

(b) 令 $a_n=\mathbf{P}\{X_n=0\}$，利用 (a) 证明：存在 $\rho<1$，使得对所有充分大的 n，

$$a-a_{n+1}\leqslant\rho(a-a_n).$$

(c) 证明：存在 $b>0$，$c<\infty$，使得对所有的 n，

$$\mathbf{P}\{\text{灭绝}\mid X_n\neq 0\}\leqslant c\mathrm{e}^{-bn}.$$

换句话说，若群体将要灭绝，那么很有可能在前几代就会灭绝.

2.15 令 X_1，X_2，…为独立同分布的随机变量，取值为整数且均值为 0. 令 $S_0=0$ 且

$$S_n=X_1+\cdots+X_n.$$

(a) 令

$$G_n(x)=\mathbf{E}\Big[\sum_{j=0}^{n}I\{S_j=x\}\Big]$$ 60

为在最初的 n 步中返回到 x 的期望次数. 证明：对所有的 n 和 x，$G_n(0)\geqslant G_n(x)$.［提示：考虑使得 $S_j=x$ 的 j 的最小值.］

(b) 回忆一下，由大数定律知，对每个 $\epsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{|S_n|\leqslant n\epsilon\}=1.$$

据此证明对每个 $\epsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{|x|\leqslant\epsilon n}G_n(x)=1.$$

(c) 利用 (a) 和 (b)，证明：对每个 $M<\infty$ 都存在一个 n，使得 $G_n(0)\geqslant M$.

(d) 推导 S_n 为一个常返马尔可夫链.

2.16 令 $p_1, p_0, p_{-1}, \cdots$ 为 $\{\cdots, -2, -1, 0, 1\}$ 上的一个概率分布，且均值为负，即

$$\sum_n n p_n = \mu < 0.$$

定义非负整数上的一个马尔可夫链 X_n，转移概率为

$$p(n,m) = p_{m-n}, \quad m > 0,$$

$$p(n,0) = \sum_{m \leqslant 0} p_{m-n}.$$

换句话说，X_n 像一个增长依赖于 p_i 的随机游动，只是此游动不允许跃到 0 以下. 这个练习的主要目的是证明该马尔可夫链为正常返的.

(a) 令 $\pi(n)$ 为该马尔可夫链的一个不变概率. 证明：对每个 $n>0$，有

$$\pi(n) = \sum_{m=n-1}^{\infty} \pi(m) p_{n-m}.$$

(b) 令 $q_n = p_{1-n}$. 证明：存在一个 $\alpha \in (0, 1)$，满足

$$\alpha = q_0 + q_1\alpha + q_2\alpha^2 + \cdots.$$

[提示：q_n 为一随机变量的概率分布，且均值大于 1，右边为 q_n 的母函数.]

61

(c) 利用 (b) 中的 α 求该马尔可夫链的不变概率分布.

2.17 令 $p(x, y)$ 为一个马尔可夫链的转移概率，其状态空间为 S. 如果

$$\sum_{y \in S} p(x,y) f(y) \leqslant f(x)$$

对一个固定状态 $z \in S$ 成立，则称 f 为 p 在 x 的上调和函数.

(a) 令$\mathcal{A}$为满足 $f(z)=1$ 的所有函数 f 的集合，且对所有的 $y \in S$，满足 $0 \leqslant f(y) \leqslant 1$，在所有 $y \neq z$ 上 f 为上调和函数. 令 g 定义为

$$g(x) = \inf_{f \in \mathcal{A}} f(x).$$

证明：$g \in \mathcal{A}$.

(b) 证明：对所有 $x \neq z$，有

$$\sum_{y \in S} p(x,y) g(y) = g(x).$$

[提示：假定对某个 x，有 $\sum_y p(x, y) g(y) < g(x)$，证明如何在 x 处递减 g，使得函数保持上调和.]

(c) g 的定义如 (a). 证明：如果对某个 x，$g(x)<1$，则

$$\inf_{x \in S} g(x) = 0.$$

[提示：令 $\varepsilon = \inf_x g(x)$，考虑 $h(x) = \frac{(g(x)-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}$.]

(d) 推导如下结论：假定一个不可约马尔可夫链，其转移概率为 $p(x, y)$，存在函数 f，使得对某些 $x \in S$ 有 $f(x)<1$，且对所有的 $y \neq z$ 上调和，其中 $f(z)=1$，$0 \leqslant f(y) \leqslant 1$，$y \in S$. 则该马尔可夫链为非常返的.

2.18 在此习题中，我们将证明斯特林公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+(\frac{1}{2})} \mathrm{e}^{-n}.$$

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立的泊松（Poisson）随机变量，均值为 1，而 $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ 为一个均值为 n 的泊松随机变量. 设

$$p(n,k) = \mathbf{P}\{Y_n = k\} = \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

(a) 利用中心极限定理证明：若 $a>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n\leqslant k<n+a\sqrt{n}} p(n,k) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

(b) 证明：若 $a>0$，n 为一个正整数，且 $n\leqslant k<n+a\sqrt{n}$，则

$$\mathrm{e}^{-a^2}p(n,n)\leqslant p(n,k)\leqslant p(n,n).$$

62

(c) 利用 (a) 和 (b) 得到结论

$$p(n,n)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

斯特林公式（2.15）即可得.

63

第3章　连续时间马尔可夫链

3.1　泊松过程

考虑时刻 t 之前到达商场的顾客数 X_t. 这里时间是连续的，即 t 在非负实数集上取值. 我们对顾客到达的速率作三个假设，直观上，它们如下所述：

1. 在一个时间间隔内到达的顾客数不会影响其他不同的时间间隔内到达的顾客数；
2. 顾客到达的“平均”速率是一个常数；
3. 每次到达的顾客只有一个.

现在我们用数学语言精确地表述这些假设. 第一个假设很简单：对于 $s_1\leqslant t_1\leqslant s_2\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant t_n$，随机变量 $X_{t_1}-X_{s_1}$，…，$X_{t_n}-X_{s_n}$ 是相互独立的. 对于第二个假设，令 λ 为顾客到达的速率，即在长度为 t 的时间内，期望到达的顾客数为 λt. 在很短的时间间隔 $[t, t+\Delta t]$ 内，期望有一个新的顾客到达的概率大约为 $\lambda\Delta t$. 第三个假设指的是在很短的时间间隔内，有超过 1 个顾客到达的概率远远小于此时间间隔. 严格地说，可将其表示为：

$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t}=X_t\}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t}=X_t+1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t}\geqslant X_t+2\}=o(\Delta t). \tag{3.3}$$

这里 $o(\Delta t)$ 表示的是当 Δt 很小时，比 Δt 还要小的某函数，即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0.$$

将满足以上假设的随机过程 X_t（$X_0=0$）称为*速率参数是 λ 的泊松过程*（Poisson process with rate parameter λ）.

65

下面我们将用两种不同的方式来推导 X_t 的分布. 首先，考虑当 n 很大时，记

$$X_t=\sum_{j=1}^{n}\left[X_{\frac{jt}{n}}-X_{\frac{(j-1)t}{n}}\right]. \tag{3.4}$$

即将 X_t 看成是 n 个独立同分布的随机变量之和. 如果 n 很大，那么其中任意一个随机变量取值为 2 或者更大时的概率就很小；实际上，

$$\boldsymbol{P}\{X_{\frac{jt}{n}}-X_{\frac{(j-1)t}{n}}\geqslant 2, j\leqslant n\}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\{X_{\frac{jt}{n}}-X_{\frac{(j-1)t}{n}}\geqslant 2\}=n\mathbf{P}\{X_{\frac{t}{n}}\geqslant 2\}.$$

由（3.3）知，当 $n\to\infty$时，上式最后一项趋于 0. 因此我们可以估计（3.4）中独立随机变量的累加和，且这些随机变量取值为 1 的概率均为 $\lambda\left(\frac{t}{n}\right)$，取值为 0 的概率均为 $1-\lambda\left(\frac{t}{n}\right)$. 利用二项分布的公式可得

$$\boldsymbol{P}\{X_t=k\}\approx\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

严格意义上，可以证明

$$\mathbf{P}\{X_t = k\} = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

要求出这个极限，注意到

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}n^{-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!},$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} = e^{-\lambda t}.$$

从而

$$\mathbf{P}\{X_t = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

即 X_t 服从参数为 λt 的泊松分布.

接下来我们用另外一种方法来推导这个公式. 令

$$P_k(t) = \mathbf{P}\{X_t = k\}.$$

66

注意到 $P_0(0)=1$，$P_k(0)=0$，$k>0$. 由方程 (3.1) ～ (3.3) 可以写出 $P_k(t)$ 的微分方程组. 根据导数的定义有

$$P_k'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = k\} - \mathbf{P}\{X_t = k\}).$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = k\} &= \mathbf{P}\{X_t = k\}\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = k \mid X_t = k\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{X_t = k-1\}\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = k \mid X_t = k-1\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{X_t \leqslant k-2\}\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = k \mid X_t \leqslant k-2\} \\ &= P_k(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

从而有

$$P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t).$$

我们可以利用递归法求解这些方程. 对 $k=0$，微分方程

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t), P_0(0) = 1$$

的解为

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

要求出 $k>0$ 时的解，考虑

$$f_k(t) = e^{\lambda t}P_k(t)$$

更简便些. 则有 $f_0(t)=1$，且微分方程变为

$$f_k'(t) = \lambda f_{k-1}(t), f_k(0) = 0.$$

从而容易归纳验证其解为

$$f_k(t) = \frac{\lambda^k t^k}{k!},$$

所以同样可以得到之前我们推导出来的公式

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

另外一种考虑泊松过程的方法是考虑顾客之间的等待时间. 令 T_n ($n=1, 2, \cdots$) 为第

$(n-1)$ 个顾客与第 n 个顾客的到达时间的间隔差，$Y_n=T_1+\cdots+T_n$ 为直到第 n 个顾客到达的总时间，我们可以记为

67

$$Y_n = \inf\{t : X_t = n\},$$
$$T_n = Y_n - Y_{n-1}.$$

这里 inf 代表"下确界"或者说最大下界，即最小值概念在无限集情形下的推广；例如，正数集的下确界为 0. T_i 为独立同分布的随机变量. T_i 必须满足的性质之一是无记忆性：如果我们已经等待了 s 个时间单位但是还没有顾客到来，那么在接下来的 t 个时间单位内，有一个顾客到达的概率和前面的 s 时间段内已经有一些顾客到来的情形是完全一样的. 用数学表达式可将该性质写为

$$\mathbf{P}\{T_i \geqslant s+t \mid T_i \geqslant s\} = \mathbf{P}\{T_i \geqslant t\}.$$

满足 $f(s+t)=f(s)f(t)$ 的唯一实值函数具有如下形式：$f(t)=e^{-bt}$. 因此 T_i 的分布必须是参数为 b 的指数分布. [回想一下，称随机变量 Z 服从速率参数为 b 的指数分布，若其密度函数为

$$f(z) = be^{-bz}, 0 < z < \infty,$$

或者等价地，它的分布函数为

$$F(z) = \mathbf{P}\{Z \leqslant z\} = 1 - e^{-bz}, z \geqslant 0.$$

通过简单的计算可以得到 $\mathbf{E}(Z)=\frac{1}{b}$.] 容易看出 b 应该取何值. 当 t 很大时，我们期望到达的顾客数为 λt. 所以 $Y_{\lambda t}\approx t$. 然而 $Y_n\approx n\mathbf{E}(T_i)=\frac{n}{b}$，所以 $\lambda=b$. 这就给出了一种构造泊松过程的方法：取独立随机变量 T_1，T_2，…，其中每个都服从速率为 λ 的指数分布，并定义

$$Y_n = T_1 + \cdots + T_n,$$
$$X_t = n, \text{若 } Y_n \leqslant t < Y_{n+1}.$$

由此我们可以用第三种方法来推导出随机变量 X_t 服从泊松过程. 反之，若给定了一个泊松过程，则根据

$$\mathbf{P}\{T_1 > t\} = \mathbf{P}\{X_t = 0\} = e^{-\lambda t}$$

可以很容易地求出 T_i 的分布.

3.2 有限状态空间

68

本节我们将讨论有限状态空间上的连续时间马尔可夫链. 先看一些与指数型随机变量相关的结论. 设 $T_1,\cdots,T_n$ 为独立随机变量，它们分别服从速率为 $b_1,\cdots,b_n$ 的指数分布. 直观上，我们可以想象成 n 个闹钟将在时刻 $T_1,\cdots,T_n$ 响起. 考虑这些闹钟最早响起的时刻；说得更精确一点，即考虑随机变量

$$T = \min\{T_1,\cdots,T_n\},$$

可以看到

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{T \geqslant t\} &= \mathbf{P}\{T_1 \geqslant t,\cdots,T_n \geqslant t\}\\ &= \mathbf{P}\{T_1 \geqslant t\}\mathbf{P}\{T_2 \geqslant t\}\cdots\mathbf{P}\{T_n \geqslant t\}\\ &= e^{-b_1 t}e^{-b_2 t}\cdots e^{-b_n t} = e^{-(b_1+\cdots+b_n)t}.\end{aligned}$$

也就是说，T 服从参数为 $b_1+\cdots+b_n$ 的指数分布. 此外，容易给出每个闹钟最先响起的概率：

$$\mathbf{P}\{T_1 = T\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_2 > t, \cdots, T_n > t\} \mathrm{d}\mathbf{P}\{T_1 = t\}$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(b_2+\cdots+b_n)t} b_1 \mathrm{e}^{-b_1 t} \mathrm{d}t = \frac{b_1}{b_1 + \cdots + b_n}.$$

换言之，第 i 个闹钟最先响起的概率为 b_i 与 $b_1+\cdots+b_n$ 的比．如果我们给定了指数型随机变量的无穷序列 T_1，$T_2\cdots$，其参数分别为 b_1，$b_2\cdots$，假如 $b_1+b_2+\cdots<\infty$，那么结果同样成立．

假设我们有一个有限状态空间 S，在 S 上定义一个连续时间过程 X_t，且它具有马尔可夫性，

$$\mathbf{P}\{X_t = y | X_r, 0 \leqslant r \leqslant s\} = \mathbf{P}\{X_t = y | X_s\},$$

还具有时齐性，

$$\mathbf{P}\{X_t = y | X_s = x\} = \mathbf{P}\{X_{t-s} = y | X_0 = x\}.$$

对任意 x，$y\in S$，$x\neq y$，我们用非负数 $\alpha(x, y)$ 标记该马尔可夫链从状态 x 转变为状态 y 的速率．令 $\alpha(x)$ 表示该马尔可夫链从状态 x 离开的总速率，即

$$\alpha(x) = \sum_{y\neq x} \alpha(x, y).$$

具有速率 α 的一个（时齐）连续时间马尔可夫链（(time-homogeneous) continuous-time Markov chain）是指在 S 上取值且满足

$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = x | X_t = x\} = 1 - \alpha(x)\Delta t + o(\Delta t), \tag{3.5}$$

$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = x | X_t = y\} = \alpha(y, x)\Delta t + o(\Delta t), y \neq x \tag{3.6}$$

的一个随机过程 X_t．也就是说，在长度为 Δt 的较短时间间隔内，该马尔可夫链从状态 y 跳跃到与其不同的状态 x 的概率约为 $\alpha(y, x)\ \Delta t$．对于泊松过程，我们用 Δt 很小时的情况写出了这些概率应满足的微分方程．这里我们作同样的处理，如果令 $p_x(t)=\mathbf{P}\ \{X_t=x\}$，那么上面的方程可以写成下面的线性微分方程组：

$$p'_x(t) = -\alpha(x) px(t) + \sum_{y\neq x} \alpha(y, x) p_y(t).$$

如果给定了一个初始条件 $p_x(0)$，$x\in S$，那么就可以求解该方程组．这一方程组通常写成矩阵形式．令矩阵 $\mathbf{A}$ 在 (x, y) 位置上的元素满足：若 $x\neq y$，则为 $\alpha(x, y)$；若 $x=y$，则为 $-\alpha(x)$．所以如果以 $\bar{p}\ (t)$ 表示概率向量，则方程组可写为

$$\bar{p}'(t) = \bar{p}(t)\mathbf{A}. \tag{3.7}$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 称为此马尔可夫链的*无穷小生成元*（infinitesimal generator）．注意到 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和等于 0，且 $\mathbf{A}$ 的非对角元均非负，而各对角元均非正．由微分方程（见 0.2 节），可求得解为

$$\bar{p}'(t) = \bar{p}(0)\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}.$$

上述解也可以用转移矩阵的形式来表示．令 $p_t(x, y)=\mathbf{P}\{X_t=y | X_0=x\}$，并令矩阵 $\boldsymbol{P}_t$ 在 (x, y) 位置上的元素为 $p_t(x, y)$．则微分方程组可以写成一个矩阵方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{P}_t\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{I}. \tag{3.8}$$

解得矩阵 $\boldsymbol{P}_t$ 为

$$\boldsymbol{P}_t = \mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}.$$

69

例1 考虑两种状态——0，1上的一个马尔可夫链．假设 $\alpha(0,1)=1$，$\alpha(1,0)=2$，则其无穷小生成元为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

为了计算 e^{tA}，我们将矩阵对角化．其特征值分别为0，－3．可把矩阵写为：

70

$$
\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},
$$

其中

$$
\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}
$$

我们利用矩阵的对角化来计算指数 e^{tA}：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_t=\mathrm{e}^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\boldsymbol{A})^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{Q}(t\boldsymbol{D})^n\boldsymbol{Q}^{-1}}{n!} \\
&= \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}+\mathrm{e}^{-3t}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

可以得到

$$
\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{P}_t=\begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \bar{\pi} \end{bmatrix}
$$

其中 $\bar{\pi}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$．

例2 考虑四种状态——0，1，2，3上的一个马尔可夫链，其无穷小生成元为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为0，－1，－3，－4，对应的右特征向量（也是左特征向量，因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的）分别为（1，1，1，1），$\left(1,0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\left(0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$．则

$$D = Q^{-1}AQ,$$

其中

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1&1&0&-\frac{1}{3}\\1&0&0&1\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&-1&1\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

71

因此有

$$P_t = e^{tA} = Qe^{tD}Q^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}+e^{-t}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$+e^{-3t}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}+e^{-4t}\begin{bmatrix}\frac{1}{12}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&\frac{1}{12}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{12}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&\frac{1}{12}\\\frac{1}{12}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&\frac{1}{12}\end{bmatrix}.$$

注意

$$\lim_{t\to\infty}P_t=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

我们可以用指数型的等待时间给出该马尔可夫链的另外一种描述．假定速率 $\alpha(x, y)$ 已经给定，设 $X_0=x$，令

$$T = \inf\{t: X_t \neq x\},$$

即 T 是该过程首次改变状态的时刻．根据马尔可夫性可以看出 T 必须具有无记忆性，因此 T 必须服从指数分布．由（3.5）得，

$$\mathbf{P}\{T \leqslant \Delta t\} = \alpha(x)\Delta t + o(\Delta t).$$

要证明上式成立，T 必须服从参数为 $\alpha(x)$ 的指数分布．该马尔可夫链又将转移到哪一个状态呢？通过（3.6）无穷小性质可以验证它转变为状态 y 的概率为 $\frac{\alpha(x, y)}{\alpha(x)}$．以上关于指数分布的讨论给我们提供了另外一种思路．相互独立的"闹钟"分别放置在各个状态 y，且每个闹钟响起的时间服从速率为 $\alpha(x, y)$ 的指数分布．该马尔可夫链一直处于状态 x，直到首个闹钟响起它才向与此闹钟相对应的状态移动．

对于离散时间情形，我们感兴趣的是极限行为．如本节例 1 和例 2 所示，我们期望

72

$$\lim_{t\to\infty} = \boldsymbol{P}_t = \Pi_t \begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \vdots \\ \bar{\pi} \end{bmatrix},$$

其中 $\bar{\pi}$ 为极限概率，且它不会随时间而改变；所以由（3.7）有

$$\bar{\pi}\mathbf{A} = \bar{0}.$$

在这种情形下，$\bar{\pi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 所对应的特征向量．这里的极限理论与离散情形是平行的．为简便起见，我们假设该马尔可夫链是不可约的．[称一个连续时间马尔可夫链是不可约的，如果它的所有状态是互通的，即对所有的状态 x，$y \in S$，存在 z_1，…，$z_j \in S$，使得 $\alpha(x, z_1)$，$\alpha(z_1, z_2)$，…，$\alpha(z_{j-1}, z_j)$，$\alpha(z_j, y)$ 均为严格正.] 在这种情况下，可以利用随机矩阵的结果来证明（见习题 3.4）：

1. *存在唯一一个概率向量 $\bar{\pi}$ 满足*

$$\bar{\pi}\mathbf{A} = \bar{0}.$$

2. *$\mathbf{A}$ 的其他特征值的实数部分均为负．*

通过分析矩阵微分方程，不难证明

$$\lim_{t\to\infty} = \boldsymbol{P}_t = \begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \vdots \\ \bar{\pi} \end{bmatrix}.$$

若该马尔可夫链可约，则必须分析在各个互通类上的马尔可夫链．我们还没有讨论周期性，对于连续时间马尔可夫链，这种现象不会发生；实际上，可以证明（见习题 3.7）对任意不可约的连续时间马尔可夫链以及任意 $t>0$，$\boldsymbol{P}_t$ 含有严格正的元素．

许多分析离散时间马尔可夫链的方法对于连续时间马尔可夫链是类似的．设 X_t 为有限状态空间 S 上的不可约连续时间马尔可夫链，z 为 S 上的某一个固定状态，我们要计算从状态 x 开始到达 z 平均所需时间（mean passage），即 $b(x)=\mathbf{E}(Y \mid X_0=x)$，其中

$$Y = \inf\ \{t: X_t = z\}.$$

显然，$b(z)=0$．当 $x \neq z$ 时，设 $X_0=x$，并令 T 是该马尔可夫链首次改变状态的时刻．则

$$\mathbf{E}(Y|X_0=x)=\mathbf{E}(T|X_0=x)+\sum_{y\in S}\mathbf{P}\{X_T=y|X_0=x\}\mathbf{E}(Y|X_0=y).$$

由于 T 服从参数为 $\alpha(x)$ 的指数分布，因此右边第一项的值为$\frac{1}{\alpha(x)}$. 从上面的讨论知，$\mathbf{P}\{X_t=y|X_0=x\}=\frac{\alpha(x,y)}{\alpha(x)}$. 最后，由于 $b(z)=0$，因此求和项中不需要包括 $y=z$ 这一项. 从而方程变为 [73]

$$\alpha(x)b(x)=1+\sum_{y\neq x,z}\alpha(x,y)b(y).$$

若令矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 是从 $\mathbf{A}$ 中划去与状态 z 相关的行与列之后得到的子矩阵，则可以得到矩阵方程

$$\bar{0}=\bar{1}+\widetilde{\mathbf{A}}\bar{b},$$

或者

$$\bar{b}=[-\widetilde{\mathbf{A}}]^{-1}\bar{1}.$$

(矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 是方阵，且它的各行元素之和均非正且其中至少存在一行元素之和是严格负的. 从这也可以推出 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 的所有特征值的实数部分均为严格负的，因此 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 是可逆的.)

例 3 考虑本节例 2，计算从状态 0 到状态 3 所需时间的期望值，则 $z=3$，

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2\end{matrix}.$$

且

$$\bar{b}=[-\widetilde{\mathbf{A}}]^{-1}\bar{1}=\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right).$$

因此从状态 0 到状态 3 的时间期望值为$\frac{8}{3}$.

3.3 生灭过程

本节我们将讨论无限状态空间上的一大类连续时间马尔可夫链，即生灭过程 (birth-and-death process). 其状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}$，且状态的变化总是从 n 到 $n+1$ 或者从 n 到 $n-1$. 直观上我们可以将系统的状态看做群体的大小，它是通过 1 个“出生”或 1 个“死亡”来增大或减小 1 的. 为了描述该马尔可夫链，我们给出出生率 λ_n ($n=0,1,2,\cdots$) 以及死亡率 μ_n ($n=1,2,3,\cdots$). 如果群体目前的状态为 n，则新的个体到达的速率为 λ_n，个体离开的速率为 μ_n (注意如果群体数目为 0，那么没有个体死亡，即 $\mu_0=0$). [74]

如果我们记 X_t 为此马尔可夫链在时刻 t 的状态，则

$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t}=n|X_t=n\}=1-(\mu_n+\lambda_n)\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t}=n+1|X_t=n\}=\lambda_n\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t}=n-1|X_t=n\}=\mu_n\Delta t+o(\Delta t),$$

仿照之前的做法，我们可以将上面的方程改写成关于 $P_n(t)=\mathbf{P}\{X_t=n\}$ 的微分方程并得到系统

$$P'_n(t)=\mu_{n+1}P_{n+1}(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)-(\mu_n+\lambda_n)P_n(t). \tag{3.9}$$

要计算转移概率

$$p_t(m,n)=\mathbf{P}\{X_t=n\mid X_0=m\},$$

我们只需求解初始条件为

$$P_m(0)=1,\ P_n(0)=0,\ n\neq m$$

的上述系统.

例 1 速率参数为 λ 的泊松过程是一个生灭过程，其中 $\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=0$.

例 2 **马尔可夫排队模型**. 设 X_t 为排队等待某项服务的顾客数，我们假设顾客以速率 λ 到达；说得更准确些，就是指顾客的到达速率服从参数为 λ 的泊松过程. 而顾客接受服务的时间服从参数为 μ 的指数分布. 接下来我们给出三种不同的服务规则：

(a) $M/M/1$ 排队系统. 这种情形下有一个服务员且只有排在首位的顾客正在接受服务. 这是一个生灭过程，它的参数为 $\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=\mu(n\geqslant 1)$. 符号中使用的两个 M 是指顾客的到达时间以及接受服务的时间都服从指数分布，因此该过程是具有马尔可夫性的，这里 1 是指有一个服务员.

(b) $M/M/k$ 排队系统. 这种情形下有 k 个服务员且排在头 k 个位置的顾客可以接受服务. 若有 k 个顾客正在接受服务，且每个顾客接受服务的速率为 μ，则顾客离开此系统的速率为 $k\mu$. 这个生灭过程的参数为 $\lambda_n=\lambda$，且

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu, & n\leqslant k,\\ k\mu, & n\geqslant k.\end{cases}$$

(c) $M/M/\infty$ 排队系统. 这种情形下有无穷多个服务员，因此队伍中的每个人都有接受服务的机会，此时 $\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=n\mu$.

75

例 3 **群体模型**. 若该马尔可夫链的状态代表群体中的个体数. 每个个体以一定的速率 λ 繁殖出下一个个体，类似地，每个个体以速率 μ 死亡. 假设所有个体的行为是相互独立的，则可以建立一个生灭过程模型，其参数为 $\lambda_n=n\lambda$，$\mu_n=n\mu$. 注意，0 在此模型中是一个吸收态. 当 $\mu=0$ 时，可称其为尤尔（Yule）过程.

例 4 **伴随迁移的群体模型**. 与上一个模型一样，假设个体死亡和繁殖的速率分别为 μ 和 λ. 同时还假设新的个体来到的速率为常数 ν，则该生灭过程的参数为 $\lambda_n=n\lambda+\nu$，$\mu_n=n\mu$.

例 5 **快速增长的群体模型**. 设群体增长的速率与个体数的平方成比例，并且假定没有死亡数，则该过程满足 $\lambda_n=n^2\lambda$，$\mu_n=0$. 这种情形下，群体的增长非常迅速，并可以很快看到它实际上能够在有限时间内达到"无限群体"状态.

在更详细地讨论上述例子之前，我们首先来阐述一些一般化的理论. 若所有状态是互通的，我们称该生灭链是不可约的. 不难发现生灭链不可约当且仅当所有的 $\lambda_n(n\geqslant 0)$ 和所有的 $\mu_n(n\geqslant 1)$ 都是正的. 若不可约马尔可夫链总是可以返回到一个状态，则称其为常返的；否则，

称其为非常返的. 对任意的生灭过程，都存在一个 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上的离散时间马尔可夫链，它在这个连续时间链"发生转移时"追随其变化，且它的转移概率为

$$p(n,\ n-1)=\frac{\mu_n}{\mu_n+\lambda_n},\ p(n,\ n+1)=\frac{\lambda_n}{\mu_n+\lambda_n}.$$

我们可以验证连续时间马尔可夫链是常返的当且仅当相应的离散时间马尔可夫链是常返的. 令 $a(n)$ 为该马尔可夫链从状态 n 开始能够到达状态 0 的概率. 注意到 $a(0)=1$ 且无论考虑的是连续时间马尔可夫链还是离散时间马尔可夫链，$a(n)$ 的值是一样的. 以离散时间马尔可夫链为例，$a(n)$ 满足

$$a(n)(\mu_n+\lambda_n)=a(n-1)\mu_n+a(n+1)\lambda_n,n>0. \tag{3.10}$$

如果该马尔可夫链是非常返的，则当 $n\to\infty$ 时，$a(n)\to 0$. 如果此马尔可夫链是常返的，则对 $a(0)=1$，$0\leqslant a(n)\leqslant 1$，$a(n)\to 0(n\to\infty)$，上述方程没有解.

下面我们将给出生灭链为非常返的充分必要条件. 要找到函数 $a(n)$，可将方程 (3.10) 改写为

$$a(n)-a(n+1)=\frac{\mu_n}{\lambda_n}[a(n-1)-a(n)],\ n\geqslant 1.$$

76

若一直迭代下去，可以得到

$$a(n)-a(n+1)=\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}[a(0)-a(1)].$$

所以

$$\begin{aligned}a(n+1)&=[a(n+1)-a(0)]+a(0)\\&=\sum_{j=0}^{n}[a(j+1)-a(j)]+1\\&=[a(1)-1]\sum_{j=0}^{n}\frac{\mu_1\cdots\mu_j}{\lambda_1\cdots\lambda_j}+1,\end{aligned}$$

其中，根据约定可知，求和项中 $j=0$ 项的值为 1. 如果上面的和收敛，那么我们可以找到一个非平凡解，即可以建立如下结论.

结论 生灭链是非常返的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}<\infty. \tag{3.11}$$

作为例子，可以考虑排队模型 (例 2). 对于 $M/M/1$ 排队系统，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n,$$

当且仅当 $\mu<\lambda$ 时，上式收敛. 在 $M/M/k$ 排队系统中，对任意 $n\geqslant k$，

$$\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\frac{k!}{k^k}\left(\frac{k\mu}{\lambda}\right)^n.$$

因此，当且仅当 $k\mu<\lambda$ 时，上述和是有限的且该马尔可夫链为非常返的. 最后，对于排队系统 $M/M/\infty$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n=\infty.$$

因此，对任意μ和λ，该马尔可夫链都是常返的. 由以上三个结果可以总结出：排队系统是非常返的（从而队伍变得越来越长）当且仅当（最大）服务速率严格小于到达速率.

77

对于常返马尔可夫链，可能存在也可能不存在极限概率. 同样地，我们称不可约马尔可夫链为正常返的，若存在一个概率分布$\pi(n)$，使得对任意状态m有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{X_t = n \mid X_0 = m\} = \pi(n).$$

否则称其为零常返的. 若系统处在极限概率状态，即$P_n(t)=\pi(n)$. 这里的$P_n(t)$与（3.9）中的一样，则$P_n'(t)$应等于0. 换言之，π应满足

$$0 = \lambda_{n-1}\pi(n-1) + \mu_{n+1}\pi(n+1) - (\lambda_n + \mu_n)\pi(n). \tag{3.12}$$

同样，对于离散时间马尔可夫链的情形，可以通过求解这些方程找到π. 如果我们找到一个满足（3.12）的概率分布，那么该马尔可夫链是正常返的，且找到的分布是唯一的平稳分布.

我们可以直接求解（3.12）. 首先，当$n=0$时，方程为

$$\pi(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi(0).$$

对$n\geqslant 1$，方程可写成

$$\mu_{n+1}\pi(n+1) - \lambda_n\pi(n) = \mu_n\pi(n) - \lambda_{n-1}\pi(n-1).$$

重复迭代下去，可以得到

$$\mu_{n+1}\pi(n+1) - \lambda_n\pi(n) = \mu_1\pi(1) - \lambda_0\pi(0) = 0.$$

从而，$\pi(n+1)=\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\right)\pi(n)$，一直重复下去可得到解为

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}\pi(0).$$

现在我们加入π是一个概率测度这个条件. 当且仅当$\sum\pi(x)<\infty$时，此条件可以考虑. 这样我们已经得到了如下结论：

结论　生灭链为正常返的当且仅当

$$q = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n} < \infty$$

（根据约定，求和项中$n=0$项的值为1），此时不变概率为

78

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}q^{-1}. \tag{3.13}$$

作为例子，还是考虑排队模型. 对于$M/M/1$排队系统，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1},$$

给定$\lambda<\mu$，否则，值为无穷大. 所以对$\lambda<\mu$，该马尔可夫链为正常返的，且平稳分布为

$$\pi(n) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

注意到，在平稳条件下队伍的期望长度为

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\pi(n) = \sum_{n=0}^{\infty}n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda}{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

特别地，λ 越接近 μ 时，期望长度值就越大. 在 $M/M/k$ 排队系统中，π 的表达形式有点复杂，但却容易证明此马尔可夫链为正常返的当且仅当 $\lambda<k\mu$. 最后，对于 $M/M/\infty$排队系统，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=e^{\lambda/\mu}.$$

所以，对于任意 λ，μ，该马尔可夫链都是正常返的，且平稳分布为

$$\pi(n)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!},$$

即该平稳分布是一个参数为$\frac{\lambda}{\mu}$的泊松分布. 平稳状态下队伍均长为$\frac{\lambda}{\mu}$.

习题 3.12 和习题 3.13 讨论了群体模型在什么样的条件下是正常返、零常返或者非常返的.

最后我们考虑两个纯生过程. 若对所有 n 有 $\mu_n=0$，则称此生灭过程为纯生过程. 首先考虑 $\lambda_n=n\lambda$ 的尤尔过程. 假设一开始群体中有 1 个个体，所以 $P_1(0)=1$，$P_n(t)=0(n>1)$，同样 $P_n(t)=\mathbf{P}\{X_t=n\}$，且 $P_n(t)$ 满足微分方程

$$P_n'(t)=(n-1)\lambda P_{n-1}(t)-n\lambda P_n(t),n\geqslant 1.$$

我们可以利用归纳法求解这些方程，但由于计算有点繁琐，这里只是简单地给出方程的解：

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}[1-e^{-\lambda t}]^{n-1},n\geqslant 1.$$

79

(不难证明上面定义的 $P_n(t)$ 满足这些方程). $P_n(t)$ 的表达形式很漂亮，实际上，对固定的 t，X_t 服从参数 $p=e^{-\lambda t}$的几何分布，从而我们可以很快求出在时刻 t 群体大小的期望值：

$$\mathbf{E}(X_t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)=e^{\lambda t}.$$

我们可以用另外一种不同的方法推导上述结果. 令 $f(t)=\mathbf{E}(X_t)$，则

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n[(n-1)\lambda P_{n-1}(t)-n\lambda P_n(t)]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\lambda P_n(t)=\lambda f(t).$$

从而，$f(t)$ 满足指数型增长的标准方程，而且由初始条件 $f(0)=1$，可以立即得到方程的解为$f(t)=e^{\lambda t}$. 对尤尔过程我们还可以从其他角度看. 考虑群体首次到达 n 的时刻 Y_n，即

$$Y_n=\inf\{t:X_t=n\}.$$

则 $Y_n=T_1+\cdots+T_{n-1}$，其中 T_i 是第 i 个个体和第 $(i+1)$ 个个体到达的时间间隔. 随机变量 T_i 是相互独立的，且 T_i 服从参数为 $i\lambda$ 的指数分布. 特别地，$\mathbf{E}(T_i)=\frac{1}{(i\lambda)}$，$\mathrm{Var}(T_i)=\frac{1}{(i\lambda)^2}$，从而

$$\mathbf{E}(Y_n)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i\lambda}\sim\frac{\ln n}{\lambda}.$$

且 $\mathrm{Var}(Y_n)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(i\lambda)^{-2}<\infty$. Y_n 在 $\ln n/\lambda$ 附近波动，且当 n 变大时，波动的误差是有界的. 若在时间为 $\ln n/\lambda$ 内群体中的个体数达到 n，则经过时间 t 以后期望的个体数应为 $e^{\lambda t}$.

现在考虑例 5 中的快速增长群体模型，其参数 $\lambda_n=n^2\lambda$. 我们同样考虑第 n 个个体进入群

体的时刻 Y_n. 这种情况下，会出现有趣的现象. 考虑

$$Y_\infty = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots$$

则

$$\mathbf{E}(Y_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}(T_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \lambda} < \infty.$$

[80] 特别地，$Y_\infty < \infty$的概率为 1. 也就是说在有限时间内群体能增长到无穷大，称此现象为爆炸 (explosion). 对于纯生过程，"爆炸"发生当且仅当 $\mathbf{E}(Y_\infty) < \infty$，即当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty.$$

3.4 一般情形

假设有一个可数（或许无限）状态空间 S，记 $\alpha(x,y)$ 为从状态 x 转变为 y 的速率. 假设对任意 x，

$$\alpha(x) = \sum_{y \neq x} \alpha(x,y) < \infty.$$

我们可以在各状态放置一个"指数型闹钟"，从而构造出一个时齐、连续时间马尔可夫链 X_t，使得对任意 $x \neq y$，

$$\mathbf{P}\{X_{t+\Delta t} = y \mid X_t = x\} = \alpha(x,y)\Delta t + o_x(\Delta t).$$

这里 $o_x(\cdot)$ 表示误差项的大小取决于状态 x. 若速率 α 无界，则该马尔可夫链可能会在有限时间内出现像 3.3 节快速增长群体模型中的有限时间内的"爆炸"现象. 假设有一个马尔可夫链，其不会出现爆炸（有时很难判断是否会发生爆炸）.

我们将考虑转移概率

$$p_t(x,y) = \mathbf{P}\{X_t = y \mid X_0 = x\} = \mathbf{P}\{X_{t+s} = y \mid X_s = x\}.$$

用跟上节相同的方式来推导此转移概率的微分方程：

$$\begin{aligned} p_{t+\Delta t}(x,y) &= p_t(x,y)p_{\Delta t}(y,y) + \sum_{z \neq y} p_t(x,z)p_{\Delta t}(z,y) \\ &= p_t(x,y)[1 - \alpha(y)\Delta t + o_y(\Delta t)] \\ &\quad + \sum_{z \neq y} p_t(x,z)[\alpha(z,y)\Delta t + o_z(\Delta t)] \\ &= p_t(x,y)[1 - \alpha(y)\Delta t] + \sum_{z \neq y} p_t(x,z)\alpha(z,y)\Delta t \\ &\quad + \sum_{z} p_t(x,z)o_z(\Delta t). \end{aligned}$$

[81]

若我们可以将最后的误差项合并使得

$$\sum_z p_t(x,z)o_z(\Delta t) = o(\Delta t), \tag{3.14}$$

则可以推导出转移概率满足下面的方程系统

$$p_t'(x,y) = -\alpha(y)p_t(x,y) + \sum_{z \neq y} \alpha(z,y)p_t(x,z),$$

其中微分项是关于时间的，有时称上述方程为此马尔可夫链的向前方程 (forward equation).

在大多数情况下，包括前三节的所有例子，可以证明（3.14）. 然而在有些例子中无法证明向前方程.

还有一种总是成立的方程的集合，称其为*向后方程*（backward equation）. 对于向后方程有

$$\begin{aligned} p_{t+\Delta t}(x,y) &= \sum_z p_{\Delta t}(x,z)p_t(z,y) \\ &= \sum_{z\neq x}[\alpha(x,z)\Delta t + o_x(\Delta t)]p_t(z,y) \\ &\quad + [1-\alpha(x)\Delta t + o_x(\Delta t)]p_t(x,y). \end{aligned}$$

误差项仅跟 x 有关. 对方程稍作些处理，当 Δt 趋于 0 时取极限可以得到

$$p'_t(x,y) = -\alpha(x)p_t(x,y) + \sum_{z\neq x}\alpha(x,z)p_t(z,y).$$

在具有无穷小生成元 $\boldsymbol{A}$ 的有限状态空间的情形下，其转移矩阵 $\boldsymbol{P}_t$ 的向后方程的矩阵形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}_t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_t,$$

可将其与（3.8）的向前方程相比较. 两方程（初始条件为 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{I}$）的解均为

$$\boldsymbol{P}_t = \mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}.$$

3.5 习题

3.1 假设每小时到达只存在一个接听服务的电话数服从参数 $\lambda=4$ 的泊松过程. [82]

(a) 求在第一个小时内有不超过两个电话打进的概率.

(b) 假设在第一个小时内有 6 个电话到达，求在第二个小时内至少有两个电话到达的概率.

(c) 假设接电话者在有 15 个电话到达之后才去吃午饭，那么他需要等待的时间的期望值为多少?

(d) 假设已知在前 2 个小时内有 8 个电话到达了，求此条件下在第一个小时内有 5 个电话到达的概率.

(e) 假设已知在前 4 个小时内有 k 个电话到达，求此条件下在第一个小时内有 j 个电话到达的概率.

3.2 设 X_t，Y_t 是速率参数分别为 λ_1，λ_2 的两相互独立的泊松过程，且分别代表到达商场 1 和商场 2 的顾客数.

(a) 在没有顾客到达商场 2 的条件下，求有一个顾客到达商场 1 的概率.

(b) 在第一个小时内，两商场的顾客数为 4 的概率是多少?

(c) 已知两商场的顾客数为 4，求这 4 个顾客都在商场 1 的概率.

(d) 令 T 为首个进入商场 2 的顾客的到达时刻，X_T 是 T 时刻商场 1 的顾客数. 求 X_T 的概率分布（即对任意 k，求 $\mathbf{P}\{X_T=k\}$）.

3.3 设 X_t，Y_t 是参数分别为 λ_1，λ_2 的独立泊松过程，表示的是到达两个不同电话机的电话

数. 令 $Z_t=X_t+Y_t$.

(a) 证明 Z_t 是泊松过程，并求 Z 的速率参数.

(b) 求首个电话打进第 1 台电话机的概率.

(c) 令 T 为使得两电话机都至少有一个电话打进的最小时刻，求随机变量 T 的密度函数以及分布函数.

3.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是有限状态空间上的一个不可约、连续时间马尔可夫链的无穷小生成元，则 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和等于 0 且 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元均非负.

(a) 设 a 是某个比 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素都要大的正数，令 $\boldsymbol{P}=\left(\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$，求证：$\boldsymbol{P}$ 是一个离散时间、不可约且非周期马尔可夫链的转移矩阵.

(b) 证明：$\boldsymbol{A}$ 存在唯一的一个特征值 0 所对应的左特征向量，使得其为概率向量，并且 $\boldsymbol{A}$ 的其他所有特征值的实数部分都严格小于 0.

83

3.5 令 X_t 为状态空间 $\{1, 2\}$ 上的一个马尔可夫链，其速率 $\alpha(1, 2)=1$，$\alpha(2, 1)=4$，求 $\boldsymbol{P}_t$.

3.6 将上题的状态空间改为 $\{1, 2, 3\}$，且速率为 $\alpha(1, 2)=1$，$\alpha(2, 1)=4$，$\alpha(2, 3)=1$，$\alpha(3, 2)=4$，$\alpha(1, 3)=0$，$\alpha(3, 1)=0$，求 $\boldsymbol{P}_t$.

3.7 令 X_t 为一个不可约连续时间马尔可夫链. 证明：对任意的 i，j，以及任意的 $t>0$，

$$\mathbf{P}\{X_t=j \mid X_0=i\}>0.$$

3.8 考虑状态空间 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上的一个连续时间马尔可夫链，其无穷小生成元为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) 求平稳分布 π.

(b) 假设该马尔可夫链从状态 1 开始，求它首次改变状态所需时间的期望值.

(c) 同样假设该马尔可夫链从状态 1 开始，求该马尔可夫链到达状态 4 所需时间的期望值.

3.9 将上题的无穷小生成元改为

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

之后做同样的处理.

3.10 设 α 为有限状态空间上的不可约连续时间马尔可夫链的速率，且设不变概率测度为 π. 令

$$p(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{\alpha(x)}, \quad x \neq y,$$

为在该连续时间马尔可夫链“发生转移时”相对应的离散马尔可夫链的转移概率. 求出用 π 和 α 表示的该离散时间马尔可夫链的不变概率.

3.11 令 X_t 为一个连续时间的生灭过程，其出生率为 $\lambda_n = 1 + \left(\frac{1}{(n+1)}\right)$，死亡率为 $\mu_n = 1$. 那么该过程是正常返、零常返还是非常返的呢？如果 $\lambda_n = 1 - \left(\frac{1}{(n+2)}\right)$，结果又如何呢？ [84]

3.12 考虑群体模型（3.3 节例 3），当 μ 和 λ 取何值时，群体必然灭亡，即在什么时候群体到达状态 0 的概率会等于 1？

3.13 考虑迁移的群体模型（3.3 节例 4），当 μ，λ 和 ν 分别取何值时，该马尔可夫链为正常返、零常返以及非常返的？

3.14 考虑参数 $\lambda_n = \frac{1}{(n+1)}$ 以及 $\mu_n = 1$ 的一个生灭过程，证明该马尔可夫链为正常返的，并给出它的平稳分布.

3.15 假设有一个确定的（deterministic）群体模型，其中群体增长的速率与群体目前大小的平方成正比. 也就是说，群体 $p(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = c\,[p(t)]^2,$$

这里 c 是常数且 $c > 0$. 设 $p(0) = 1$，求解上述微分方程（分离变量）并描述当时间增大时将会发生什么现象.

3.16 考虑出生率为 λ_n，死亡率为 μ_n 的一个生灭过程，求转移概率 $p_t(m, n)$ 的向后方程. [85]

第4章 最优停时

4.1 马尔可夫链的最优停时

考虑如下简单的游戏．一个玩家掷一个骰子．如果玩家掷到 6 点，那么此玩家将不赢钱．否则，玩家要么赢得 k 元钱（k 是玩家掷到的点数）并退出比赛，要么继续掷下一轮骰子．如果玩家选择掷下一轮骰子，游戏继续进行下去，直到再次出现 6 点或者玩家自己退出比赛为止．游戏最终总收益永远是 k 元钱，这里 k 指的是最后一轮所掷骰子的点数（除非骰子被掷在 6 点，那么赢钱数为 0）．现在问：玩家的最优策略是什么呢？

为了确定最优策略，我们有必要考虑怎样才算达到最优．例如，如果玩家只是想保证收益是正的，那么游戏在第一轮就应该结束——玩家要么因为掷到 6 点而结束游戏，要么因为掷到其他点而保证了收益是正数而结束游戏．然而，我们有足够的理由去考虑：如果玩家决定最大化期望收益，那么将会发生什么样的情况呢？让我们来分析这个问题，然后再阐述怎样把这个问题应用到更一般的马尔可夫链问题中．

首先，令 $f(k)$ 表示每一轮游戏的收益，在这个例子中，如果 $k\leqslant 5$，$f(k)=k$ 且 $f(6)=0$．令 $v(k)$ 表示假设玩家在选择最优策略且第一轮掷到的点数为 k 时，玩家的期望赢利．在这种情形下，我们可能不知道最优策略是什么，但是讨论 v 还是可行的．实际上，我们将写出一个 v 满足的方程，然后通过这个方程决定 v 的取值和最优策略．首先我们知道 $v(6)=0$ 和 $v(5)=5$．后者成立是由于当玩家掷到 5 点时，显然没有必要再玩下去，因此此时的最优策略是停止游戏同时赢得 5 元收益．但是对于 $k\leqslant 4$ 的情况，$v(k)$ 的值就没有这么明显了．

现在我们令 $u(k)$（$k\leqslant 5$）表示玩家在掷到 k 点时，然后采用最优策略继续游戏的期望总收益．[在这个特例中，$u(k)$ 事实上对所有的 k 是相等的．] 因此很容易知道

$$u(k)=\frac{1}{6}v(1)+\frac{1}{6}v(2)+\frac{1}{6}v(3)+\frac{1}{6}v(4)+\frac{1}{6}v(5)+\frac{1}{6}v(6).$$

87 通过 $u(k)$，我们现在可以写出最优策略了，那就是：如果 $f(k)>u(k)$，那么玩家应该停止游戏并赢得当局的收益；如果 $f(k)<u(k)$，那么玩家应该继续游戏．换言之，

$$u(k)=\max\{f(k),u(k)\}.$$

特别地，有 $v(k)\geqslant f(k)$．这个事实说明 $u(k)\geqslant(f(1)+\cdots+f(6))/6=5/2$．我们现在对最优策略有了进一步的了解——如果当前所掷得的点数是 1 或 2，那么玩家应该继续游戏．因此，

$$v(1)=\frac{v(1)+\cdots+v(6)}{6}=\frac{v(1)+\cdots+v(4)}{6}+\frac{5}{6},$$

$$v(2)=\frac{v(1)+\cdots+v(4)}{6}+\frac{5}{6}.$$

假定第一次所掷骰子的点数是 4．又假定最优策略是继续游戏．显然这个策略也同样是第一次所掷骰子的点数为 3 时的最优策略．在此策略下，游戏必须一直进行下去直到出现 5 点或 6 点为止，而这两个使得游戏结束的点数出现的概率是相等的．这就可以给出期望收益是 $(5+0)/2=5/2$，它小于 4．因此上面所假设的最优策略并不是真正的开局是 4 的最优策略．

所以，玩家的最优策略应该是停止游戏，然后得到收益 $v(4)=f(4)=4$. 最后我们考虑当第一次掷得的点数是 3 时将会出现的情况. 假设所掷到的点数是 3，玩家继续游戏，否则应用最优策略. 令 u 表示在此情形下的期望收益，那么有

$$u = \mathbf{P}\{\text{抛掷} \leqslant 3\}u + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5.$$

求解 u，我们得到 $u=9/3$. 它等于 $f(3)$，可见继续游戏的期望收益和停止游戏是一样的，都是 $v(3)=3$. 通过这些值，我们可以求解 $v(1)$ 和 $v(2)$，得到 $v(1)=v(2)=3$. 综上所述，当骰子被掷到 1 点或者 2 点时，最优策略是继续游戏；当被掷到 4、5、6 点时，最优策略是停止游戏；当被掷到 3 点时，最优策略是既可以继续游戏也可以停止游戏.

下面我们一般化这些思想. 假定 $\boldsymbol{P}$ 是状态空间为 S 的一个离散时间马尔可夫链 X_n 的转移矩阵. 为了简单起见，我们假定 S 是有限的，但是下面的很多阐述也同样可以应用到无限状态空间的情形. 假设 f 为对应于每个状态的一个收益函数，它表示当该马尔可夫链到达这一状态后停止时的收益. 我们感兴趣的是：$\boldsymbol{P}$ 并非不可约，否则玩家可以一直进行游戏直到到达收益最大的状态. 一个停止规则或者停时是指一个随机变量 T，它给出了马尔可夫链在何时停止. 这里存在很重要的一点：玩家 n 时刻决定停止与否仅仅与 n 时刻以前发生的状态有关，也就是说，玩家不能靠未来的信息决定是否停止. 由于我们考虑的是时齐马尔可夫链，因此不难知道最合理的不考虑未来的停止规则具有如下的形式：状态空间被分为两个集合 S_1 和 S_2. 如果马尔可夫链的状态在 S_1 中取值，那么玩家继续游戏；如果马尔可夫链的状态在 S_2 中取值，玩家停止游戏. 其目的是在所有的停止规则中选择能使期望收益最大化的停止规则. 我们令 $v(x)$ 为状态 x 的价值 (value)，即在最优停止策略下的期望收益. $v(x)$ 可以写成如下形式：

88

$$v(x) = \max_T \mathbf{E}[f(X_T) \mid X_0 = x],$$

公式中最大值的选取基于所有合法的停止规则.

v 满足两个主要的不等式. 第一，v 大于等于停止游戏的收益，

$$v(x) \geqslant f(x). \tag{4.1}$$

第二，v 大于等于玩家继续游戏的最大期望收益，

$$v(x) \geqslant \boldsymbol{P}v(x) = \sum_{y \in S} p(x,y)v(y). \tag{4.2}$$

事实上，v 等于这些值的最大值：

$$v(x) = \max\{f(x), \boldsymbol{P}v(x)\}. \tag{4.3}$$

如果令 S_1 表示在最优策略下玩家继续游戏的状态集；S_2 表示在最优策略下玩家停止游戏的状态集，并令

$$T = \min\{j \geqslant 0 : X_j \in S_2\},$$

那么

$$v(x) = \mathbf{E}[f(X_T) \mid X_0 = x].$$

现在来研究函数 v 的性质. 我们称函数 u 为对应于 $\boldsymbol{P}$ 的上调和函数，如果它满足 (4.2)，即

$$u(x) \geqslant \boldsymbol{P}u(x).$$

假设 u 是上调和函数，T 是对应于如上定义的停止规则的时间. 考虑时间 $T_n=\min\{T, n\}$，

我们有

$$u(x) \geqslant \mathbf{E}[u(X_{T_n}) \mid X_0 = x].$$

89 当 $n=0$ 时，上面的结论显然成立．假设 $n-1$ 时结论也成立，那么有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[u(X_{T_n}) \mid X_0 = x] &= \sum_{y \in S} \mathbf{P}\{X_{T_n} = y \mid X_0 = x\} u(y) \\
&= \sum_{y \in S} \sum_{z \in S} \mathbf{P}\{X_{T_n} = y \mid X_{T_{n-1}} = z\} \mathbf{P}\{X_{T_{n-1}} = z \mid X_0 = x\} u(y) \\
&= \sum_{z \in S_2} \sum_{y \in S} \mathbf{P}\{X_{T_n} = y \mid X_{T_{n-1}} = z\} \mathbf{P}\{X_{T_{n-1}} = z \mid X_0 = x\} u(y) \\
&\quad + \sum_{z \in S_1} \sum_{y \in S} \mathbf{P}\{X_{T_n} = y \mid X_{T_{n-1}} = z\} \mathbf{P}\{X_{T_{n-1}} = z \mid X_0 = x\} u(y).
\end{aligned}$$

如果 $z \in S_2$，那么 $\mathbf{P}\{X_{T_n} = z \mid X_{T_{n-1}} = z\} = 1$，因此上式中最后一个表达式的第一个两次求和项等于

$$\sum_{z \in S_2} \mathbf{P}\{X_{T_{n-1}} = z \mid X_0 = x\} u(z).$$

如果 $z \in S_1$，那么 $\mathbf{P}\{X_{T_n} = y \mid X_{T_{n-1}} = z\} = p(z, y)$，因此

$$\sum_{y \in S} \mathbf{P}\{X_{T_n} = y \mid X_{T_{n-1}} = z\} u(y) = \boldsymbol{P}u(z) \leqslant u(z).$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[u(X_{T_n}) \mid X_0 = x] &\leqslant \sum_{z \in S} \mathbf{P}\{X_{T_{n-1}} = z \mid X_0 = x\} u(z) \\
&= \mathbf{E}[u(X_{T_{n-1}}) \mid X_0 = x] \leqslant u(x).
\end{aligned}$$

由于 u 是有界函数，可令 $n \to \infty$，得到

$$u(x) \geqslant \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[u(X_{T_n}) \mid X_0 = x] = \mathbf{E}[u(X_T) \mid X_0 = x].$$

现在假定对所有的 x，有 $u(x) \geqslant f(x)$．那么

$$u(x) = \mathbf{E}[u(X_T) \mid X_0 = x] \geqslant \mathbf{E}[f(X_T) \mid X_0 = x] = v(x).$$

因此，每个大于 f 的上调和函数都大于等于收益函数 v．我们也可以得到（习题 4.7）：如果 $\{u_i(x)\}$ 是任意的上调和函数集，那么

$$u(x) = \inf_i u_i(x)$$

90 同样是上调和的．因此得到如下结论．

结论 v 是对应于 $\boldsymbol{P}$ 且大于等于 f 的最小上调和函数；也就是说

$$u(x) = \inf u(x),$$

上式中的下确界是在所有满足条件 $u(x) \geqslant f(x)$ 的上调和函数 u 上选取的．

这一性质告诉了我们一个求 v 的算法．算法从函数 $u_1(x)$ 出发，这里当 x 是吸收状态时，$f(x)$，其他情况，$u_1(x)$ 等于函数 f 的最大值．这就给出了一个大于 f 的上调和函数．令

$$u_2(x) = \max\{\boldsymbol{P}u_1(x), f(x)\}.$$

由于 u_1 是上调和的，且 $u_1 \geqslant f$，因此 $u_2(x) \leqslant u_1(x)$．同样地，

$$\boldsymbol{P}u_2(x) \leqslant \boldsymbol{P}u_1(x) \leqslant u_2(x)$$

因此，u_2 是一个大于 f 的上调和函数．同理，我们定义

$$u_n(x) = \max\{\boldsymbol{P}u_{n-1}(x), f(x)\},$$

并且我们知道 u_n 是一个大于 f 但是小于 u_{n-1} 的上调和函数．在本节最后我们将证明

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

例 1 如果考虑我们前面分析过的例子，并从函数 $u=[5, 5, 5, 5, 5, 0]$ 开始迭代，经过 10 步迭代后可以得到 $u_{10}=[3.002, 3.002, 3.002, 4, 5, 0]$．

例 2 假定 X_n 是在 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上带有吸收壁的一个简单随机游动$\left(p=\frac{1}{2}\right)$．令收益函数是 $f=[0, 2, 4, 5, 9, 3, 0]$（我们很自然地把收益函数写成向量的形式）．首先我们将确定最优策略．显然，玩家在状态 4 应该停止且在状态 0 和 6 应该停止．在状态 5 时，存在$\frac{1}{2}$的概率转移到状态 4，存在$\frac{1}{2}$的概率转移到状态 6；玩家继续游戏的期望收益至少为$\frac{9}{2}>f(5)=3$，因此在状态 5 时，应该继续．如果玩家从状态 3 开始，那么只移动一步就停止的期望收益是$\frac{(4+9)}{2}=\frac{13}{2}$．由于这个期望大于 $f(3)=5$，则在状态 3 的最优策略是继续游戏，得到 $v(3)\geqslant\frac{13}{2}$．注意到处在状态 2 时，继续游戏的期望收益最小为 $[f(1)+v(3)]/2\geqslant\frac{17}{4}\geqslant f(2)=4$．因此，在状态 2 的最优策略也是继续游戏，得到 $v(2)\geqslant\frac{17}{4}$．同理，在状态 1 继续游戏的期望收益是$\frac{v(2)}{2}\geqslant\frac{17}{8}>f(1)=2$，因此在状态 1 的最优策略也是继续游戏．综上所述，在这个例子中停止集是 $S_2=\{0, 4, 6\}$．价值函数可以由如下形式实现：

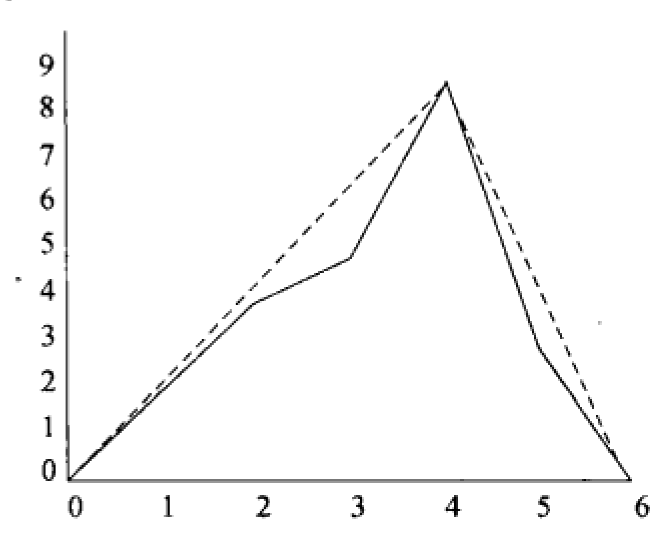
$$v(x) = \mathbf{E}[f(X_T) \mid X_0 = x] = 9\mathbf{P}\{X_T = 4 \mid X_0 = x\}.$$

91

式子中的概率已经在前面（见 1.16）给出，我们得到

$$v = \left[0, \frac{9}{4}, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, 9, \frac{9}{2}, 0\right].$$

下图中的实线代表 f，虚线代表 v．对于简单随机游动，上调和函数是凹函数．函数 v 是满足条件 $v\geqslant f$ 的最小凹函数．



在这个例子中，如果从初始函数 $u_1=[0, 9, 9, 9, 9, 9, 0]$ 开始迭代，运用上面提到的算法迭代 20 次后，我们得到的结果和真实值的误差在 0.01 范围之内.

在解决最优停止问题时，我们同时计算出了价值函数 v 和最优停止策略. 假设已知我们将要选择的策略，即我们已经把状态空间划分成了两个子集 S_1 和 S_2，S_1 是继续游戏状态所组成的集合，S_2 是停止集. 令 $u(x)$ 表示采用此策略的期望收益. 那么 u 满足：

$$u(x) = f(x), \quad x \in S_2, \tag{4.4}$$

$$u(x) = \mathbf{P}u(x), \quad x \in S_1. \tag{4.5}$$

[92] 这是一个边值问题（即所谓狄利克雷问题（Dirichlet problem））的一个离散形式. 集合 S_2 是边界集，$u(x)$ 在 S_2 上的取值已给定. 对于 S_1 中的“内点”，某差分方程成立. 我们已经知道求解这一系统的概率模型可以以如下形式给出：

$$u(x) = \mathbf{E}[f(X_T) \mid X_0 = x],$$

其中

$$T = \min\{j \geqslant 0 : X_j \in S_2\}.$$

对于一个有限状态的马尔可夫链，解可以直接给出，因为（4.4）和（4.5）给出了含有 k 个未知数的 k 个线性方程，其中 k 是集合 S_1 中的点数，未知数是 $u(x)$，$x\in S_1$.

现在我们证明上面提到的算法确实收敛到价值函数 v. 令 $u(z)=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z)$. 由于 u 是上调和函数的下极限，因此 u 是上调和的（见习题 4.7）. 同时对于所有的 z，有 $u(z)\geqslant f(z)$. 因此，由 v 的性质，我们得到

$$u(z) \geqslant v(z). \tag{4.6}$$

定义停止集合 S_2 为

$$S_2 = \{z : u(z) = f(z)\},$$

$$S_1 = \{z : u(z) > f(z)\}.$$

在 S_1 中，$\mathbf{P}u(z)=u(z)$（如果 $\mathbf{P}u(z)<u(z)$，那么对于某些 n，有 $\mathbf{P}u_n(z)<u(z)\leqslant u_n(z)$，因此 $u_{n+1}(z)=\max\{\mathbf{P}u_n(z), f(z)\}<u(z)$，这是不可能的)，因此，

$$u(z) = \mathbf{E}[u(X_T) \mid X_0 = z],$$

其中 T 是对应于集合 S_1 和 S_2 的策略. 因为 $v(z)$ 是所有可选择的停止集合中的最大期望收益，因此

$$u(z) \leqslant v(z). \tag{4.7}$$

结合（4.6）和（4.7），我们可以看到：对所有的 z，$u(z)=v(z)$.

4.2 带成本的最优停时

考虑前一节中的第一个例子，且假定每多进行一次游戏必须付费 1 元，即在每一轮游戏中我们要么以得到本局的收益而结束游戏，要么付费 1 元进行下一轮游戏. 一般地，我们假定对[93] 于每一个状态，都存在一个成本函数 $g(x)$，使得必须付费才能使链继续. 和前面一样，我们假设存在收益函数 f. 令 $v(x)$ 表示对应于某一停止规则的收益减去成本后的期望值，这个停止规则是基于最大化这一期望净收益而选取的. 我们可以把它写成如下形式：

$$v(x)=\max_T \mathbf{E}\Big[f(X_T)-\sum_{j=0}^{T-1}g(X_j)\mid X_0=x\Big],$$

同样地，最大值在所有合法的停时 T 中选取. 那么 $v(x)$ 满足

$$v(x)=\max\{f(x),\boldsymbol{P}v(x)-g(x)\}.$$

这里，如果马尔可夫链继续，那么减去成本后的期望净收益是 $\boldsymbol{P}v(x)-g(x)$. 同样可以把状态空间 S 划分为两个子集 S_1 和 S_2，且满足

$$S_2=\{x:v(x)=f(x)\},$$

当马尔可夫链进入 S_2 中的任意一个状态时，最优停止规则是停止.

利用与 4.1 节相同的讨论方法，此例中的价值函数 v 可以表示为大于 f 且满足如下条件的函数 u 的最小值：

$$u(x)\geqslant \boldsymbol{P}u(x)-g(x).$$

换言之，

$$v(x)=\inf u(x).$$

上式中的下确界在所有满足 $u(x)\geqslant f(x)$ 和 $u(x)\geqslant \boldsymbol{P}u(x)-g(x)$ 的函数 u 上选取. 为了求出价值函数，我们可以使用与 4.1 节相同的算法. 定义函数 u_1 为满足下列条件的函数：对于所有吸收状态它的值等于函数 f，在其他状态则等于函数 f 的最大值. 然后定义

$$u_n(x)=\max\{f(x),\mathbf{P}u_{n-1}(x)-g(x)\},$$

那么有

$$v(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x).$$

例 1 假设我们考虑掷骰子游戏，其中 $f=[1, 2, 3, 4, 5, 0]$，$g=[1, 1, 1, 1, 1, 1]$. 成本函数使得玩家更不可能继续进行游戏，所以当玩家掷到 4 或 5 点时，很明显玩家应该停止游戏；同理，当玩家掷到 3 点时，玩家也应该停止游戏，因为这个结果既不好也不坏，而且继续游戏还需要成本. 如果玩家掷到 1 点，那么进行下一轮游戏，玩家的期望收益是 5/2 并且成本为 1. 因此玩家的期望净收益是 3/2. 因此如果掷到 1 点，玩家应该继续游戏. [94]

假定当掷到 1 或 2 点时，玩家继续游戏，当掷到其他点时，玩家停止游戏. 令 $u(k)$ 为利用此策略的期望赢利. 那么 $u(1)=u(2)=u$，$u(k)=k$，$k=3, 4, 5$，同时，

$$u(2)=\frac{1}{6}u(1)+\frac{1}{6}u(2)+\frac{1}{6}u(3)+\frac{1}{6}u(4)+\frac{1}{6}u(5)+\frac{1}{6}u(6)-1=\frac{1}{3}u+1.$$

求解 u 得到 $u=\frac{3}{2}$. 由于它小于 $f(2)=2$，所以当玩家掷到 2 点时，停止是正确的选择. 因此停止集是 $S_2=\{2, 3, 4, 5, 6\}$，且价值函数是

$$v=\Big[\frac{8}{5},2,3,4,5,0\Big].$$

如果我们从初始函数 $u_1=[5, 5, 5, 5, 5, 0]$ 开始迭代，利用上面所描述的算法，那么仅经过几步迭代，便得到

$$u_{10}=[1,6,2,3,4,5,0].$$

例 2 考虑前一节的另外一个例子，即 X_n 表示 $\{0, 1, \cdots, 6\}$ 上的带有吸收壁的一个简单随机游动，且 $f=[0, 2, 4, 5, 9, 3, 0]$. 假设我们加入一个成本函数，其中当质点从 0，1，

2点移动时，成本为0.5，当质点从3，4，5，6点移动时，成本为1，即成本函数为

$$g = [0.5,0.5,0.5,1,1,1,1].$$

如果从初始函数 $u_1=[0,9,9,9,9,9,0]$ 开始迭代，那么仅仅经过6次迭代，我们得到

$$u_6 = [0,2,4,5.5,9,3.5,0],$$

上式给出了价值函数 v. 在此例中，停止集是 $S_2=\{0,1,2,4,6\}$.

例3 加入成本函数后，即使是不可约马尔可夫链，问题也很可能变为非平凡的. 假设我们进行如下游戏：投掷两个骰子；玩家可以随时停止并且得到和所掷得点数一样的收益，或者玩家也可以继续游戏，但是必须付费，付费规则是：当当局的点数小于5时，付2个单位的钱；当当局的点数大于等于5时，付1个单位的钱. 在此例中状态空间为 $\{2,3,4,\cdots,12\}$，

$$f \doteq [2,3,4,\cdots,12], \quad g = [2,2,2,1,1,\cdots,1].$$

如果以 $u_1=[12,12,\cdots,12]$ 作为迭代初值，那么经过20步迭代，我们得到价值函数 v，

$$v = \left[5\frac{2}{3},5\frac{2}{3},5\frac{2}{3},6\frac{2}{3},6\frac{2}{3},7,8,9,10,11,12\right].$$

95 停止集是 $S_2=\{7,8,\cdots,12\}$.

4.3 带折现的最优停时

在金融建模中，经常假设金钱的价值随时间贬值. 让我们假设存在一个给定的折现因子 $\alpha<1$. 根据这个假定，单位时间后1元钱的价值等于现在 α 元钱的价值. 同样地，假设我们有一个马尔可夫链 X_n，它的转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}$，收益函数为 f. 现在的目的是：在考虑金钱随时间贬值的情况下，最优化期望收益. 如果该马尔可夫链经过 k 步后停止，那么在 k 步后即时的收益是实际收益的 α^k 倍.

在这种情况下，价值函数为如下形式：

$$v(x) = \max_T \mathbf{E}[\alpha^T f(X_T) \mid X_0 = x],$$

同样，最大值在所有合法的停止规则中选取. 为了求出这个价值函数，我们把 v 看做满足如下条件的函数 u 的最小值：

$$u(x) \geqslant f(x),$$
$$u(x) \geqslant \alpha \boldsymbol{P} u(x).$$

利用与前面相似的算法，我们可以求得 v. 从函数 u_1 开始迭代，它满足：对于所有的吸收状态，u_1 的值等于 f，对于其他的状态，u_1 等于 f 的最大值. 然后定义 u_n 为如下递归形式：

$$u_n(x) = \max\{f(x), \alpha \boldsymbol{P} u_{n-1}(x)\}.$$

那么

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

例1 再次考虑投掷骰子的游戏. 假定折现因子是 $\alpha=0.8$. 由于折现因子的存在，因此玩家将更倾向于停止游戏，所以我们很容易知道，当玩家当局掷到3，4或5点时，玩家应该停止游戏. 如果玩家当局掷到1点，那么再玩一局，玩家至少可以获得的期望收益是

$$0.8\left[\frac{(1+2+3+4+5)}{6}\right] = 2,$$

所以玩家最好的选择是继续游戏. 假设我们使用如下策略：在掷到1或2点时，继续游戏，在

掷到其他点时，则停止游戏. 令 u 表示继续游戏的期望收益. 那么有

$$u = 0.8\left(\frac{u}{6}+\frac{u}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right).$$

求解 u，我们得到 $u=\frac{24}{11}>2$，所以当玩家掷到 2 点时，最优策略是继续游戏. 因此停止集是 $S_2=\{3, 4, 5, 6\}$，价值函数是

$$v = \left[\frac{24}{11},\frac{24}{11},3,4,5,0\right].$$

96

例 2 考虑在 $\{0, 1, \cdots, 6\}$ 上带有吸收壁的一个简单随机游动的例子，且 $f=[0, 2, 4, 5, 9, 3, 0]$. 假设不存在成本函数，但是货币价值以 $\alpha=0.9$ 的速率折现. 如果从函数 $u_1=[0, 9, 9, 9, 9, 9, 0]$ 开始迭代，那么经过 7 次迭代后，我们得到

$$u_7 = [0,2,4,5.85,9,4.05,0].$$

停止集是 $\{0, 1, 2, 4, 6\}$.

同时包括成本函数和折现因子也是值得考虑的. 假定在本节中引进另一个假设，存在成本函数 $g(x)$，它表示当链处于状态 x 时，下一次移动所要花费的成本额. 那么，价值函数 v 就是满足如下条件的函数 u 的最小值：

$$u(x) \geqslant f(x),$$
$$u(x) \geqslant \alpha \boldsymbol{P}u(x) - g(x).$$

例 3 考虑与前面例子一样的存在吸收壁的随机游动，收益函数为 $f=[0, 2, 4, 5, 9, 3, 0]$，同时成本函数为 $g=[0.5, 0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1]$，折现因子为 $\alpha=0.9$. 如果我们从函数 $u_1=[0, 9, 9, 9, 9, 9, 0]$ 开始迭代，那么仅仅经过 3 次迭代便得到

$$v = [0,2,4,5,9,3.05,0].$$

停止集是 $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$.

例 4 考虑在状态空间 $\{0,1,2,\cdots,10\}$ 上带有吸收壁的一个随机游动. 假设收益函数为质点所处状态的平方，即

$$f = [0,1,4,5,9,\cdots,100].$$

假设存在 0.6 的固定成本和 $\alpha=0.95$ 的折现因子. 我们从如下初始函数开始迭代：

$$u_1 = [0,100,100,100,\cdots,100].$$

那么经过 60 步迭代后，可以得到

$$u_{60} = [0,1.51,4.45,9.11,16,25,36,49,64,81,100].$$

停止集是 $\{0,4,5,6,\cdots,10\}$.

97

4.4 习题

4.1 考虑在 $\{0,1,2,\cdots,10\}$ 上的带有吸收壁的一个简单随机游动 $\left(p=\frac{1}{2}\right)$. 假定收益函数具有形式

$$[0, 2, 4, 3, 10, 0, 6, 4, 3, 3, 0].$$

找到最优停时并且给出从每一点开始的期望收益.

4.2 考虑如下的游戏：投掷两个骰子．如果你掷到 7 点，那么游戏结束并且你获得零收益．否则，你可以停止游戏并获得与两个骰子点数之和相同的收益．如果继续，那么你继续投掷下一次骰子．游戏要么以掷到 7 点结束，要么由你自己决定结束．如果你在掷到 7 点之前结束，那么你将获得与最后一轮掷到的两个骰子点数之和相同的收益．考虑下面两种情况下你的期望赢利：a）如果你总是在第一轮就结束游戏；b）如果你以最优化你的期望赢利为目的进行游戏．

4.3 考虑习题 4.1，在下面情况下回答相同的问题：

(a) 每一步移动都存在固定的成本 0.75；

(b) 加入折现因子 $\alpha=0.95$；

(c) 同时考虑上述两种因素．

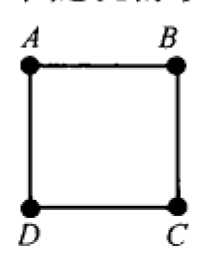
4.4 考虑习题 4.2，在下面情况下回答相同的问题：

(a) 加入成本函数 $g=[2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$；

(b) 加入折现因子 $\alpha=0.8$；

(c) 同时考虑上述两种因素．

4.5 考虑在如下所示的 4 顶点图上的一个简单随机游动．



假设收益函数为：$f(A)=2$，$f(B)=4$，$f(C)=5$，$f(D)=3$．且假定对于每一步移动都不考虑成本，但是存在一个折现因子 α．为使得最优停止策略是在每个顶点都停止，即 $S_2=\{A, B, C, D\}$，α 的最大可能值是什么？

4.6 考虑如下简单的游戏．玩家掷一个骰子．如果掷到 1 点，那么玩家输掉比赛．如果掷到 $k>1$ 点，玩家要么取得收益 k^2 而停止比赛，要么进行下一轮游戏．因此，最终收益要么是 0（如果玩家掷到 1 点），要么是最后一局点数的平方值．

98

(a) 这个游戏的最优策略是什么？玩家使用最优策略的期望赢利是多少？

(b) 假定每局游戏都需要花费成本 r．要使得最优策略如下：如果玩家掷到 2 点，那么继续游戏，而其他情况则停止游戏，成本 r 的最小值应该是多少？

4.7 如果 $u_1(y)$，$u_2(y)$，…都是对应于 $\boldsymbol{P}$ 的在点 x 的上调和函数，即

$$\boldsymbol{P}u_i(x) \leqslant u_i(x),$$

同时令 u 为函数

$$u(y) = \inf_i u_i(y),$$

证明：u 也是对应于 $\boldsymbol{P}$ 的在点 x 的上调和函数．

4.8 考虑一个简单的“幸运轮”游戏．一个转盘被分割为 12 个全等的楔形．其中 11 个楔形上面分别标有数字 100，200，…，1 100，它们表示如果转盘指针在数字所在的位置上停止，那么玩家将赢得的钱数．第 12 个楔形标有“破产”两个字．玩家可以按他或者她的意愿来决定转动转盘的次数．每次转盘指针停止在一个标有数字的楔形上时，

玩家赢得的钱数为当前楔形上所标记的钱数加上玩家以前赢得的钱数. 然而, 一旦转盘指针落在了标有"破产"的楔形中时, 玩家就会失去他/她到当局转动为此所有赢得的钱. 玩家可以随时停止游戏, 然后带走他或者她所有赢得的钱(假设标有"破产"的楔形没有出现).

假设玩家为了最大化他的期望收益而进行此局游戏, 那么玩家进行此局游戏的最优策略是什么? 他的最大期望收益又是多少? 希望你首先进行一个计算机模拟.

4.9 假设 X_n 为状态空间 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上的带吸收壁的随机游动, 它的转移概率是

$$p(n,n+1) = p(n,n-1) = \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 1.$$

假设收益函数是 $f(n)=n^2$. 让我们尝试找到一个停时 T 使得 $\mathbf{E}[f(X_T)]$ 最大化.

(a) 证明: 如果 $X_n>0$, 那么

$$\mathbf{E}[f(X_{n+1}) \mid X_n] > f(X_n).$$

得到结论: 每一个最优策略都不会在大于 0 的任何一个整数状态上停止. 99

(b) 因为该随机游动是常返的, 我们知道质点最终会到达 0 点停止且取得 0 收益. 由于我们的"最优"策略告诉我们在到达 0 点之前不要停止, 因此我们使用此最优策略的最终收益将为 0. 这里显然存在某些错误——你对此有什么想法?

4.10 我们已经限制我们在制定停止规则 T 时, 不考虑将来的情况. 现在, 假设可以了解到未来的情况, 使得我们总是知道我们什么时候将达到最大收益的状态. 解释为什么期望收益是

$$v_{\text{prop}}(x) := \mathbf{E}[\max_n f(X_n) \mid X_0 = x].$$

上述公式中的下标"prop"代表"预测." 显然有 $v_{\text{prop}}(x) \geqslant v(x)$.

(a) 对于本章开头所讨论(当骰子被掷到 6 点时, 游戏停止)的掷骰子游戏, 求出 v_{prop}.

(b) 对于如习题 4.1 所示的马尔可夫链和收益函数, 求出 v_{prop}. 100

第5章　鞅

5.1　条件期望

要了解鞅，即一个“公平赌博”的模型，我们首先需要了解条件期望. 先看一些简单的例子并通过它们建立起一个一般的定义. 设 Y 是代表某随机实验结果的随机变量. 如果不知道任何关于该实验结果的信息，那么对 Y 值的最佳估计应该为它的期望值 $\mathbf{E}(Y)$. 当然，如果知道了实验结果的完整信息，那么我们也就知道了 Y 的确切值. 条件期望处理的就是在给定某些但并非全部关于结果信息的条件下对 Y 值进行最佳估计. 首先我们将讨论随机变量 Y 关于有限个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的条件期望，紧接着将在最后讨论关于无限个随机变量的条件期望.

设 X，Y 为离散型随机变量，它们的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\mathbf{P}\{X=x,Y=y\},$$

且边际概率密度函数为

$$f_X(x)=\sum_y f(x,y),\quad f_Y(y)=\sum_x f(x,y).$$

要定义在给定 X 条件下 Y 的条件期望 $E(Y|X)$，我们需要给出 x 取任意值时 Y 的最佳值. 稍微思考一下，可以定义

$$\begin{aligned}E(Y|X)(x)&=\sum_y y\mathbf{P}\{Y=y|X=x\}\\&=\sum_y y\,\frac{\mathbf{P}\{X=x,Y=y\}}{\mathbf{P}\{X=x\}}\\&=\frac{\sum_y yf(x,y)}{f_X(x)}.\end{aligned}$$

101

若 $f_X(x)>0$，这一定义是合理的，并且对于 x 的其他值我们不需要为如何定义 $E(Y|X)(x)$ 而烦恼，因为 x 取这些值的概率为 0. 作为例子，假设抛掷两个独立的骰子并以 X 表示第一次抛掷得到的值，以 Y 表示两次抛掷得到的和. 那么

$$f(x,y)=\frac{1}{36},x=1,2,\cdots 6,y=x+1,x+2,\cdots x+6,$$

且

$$E(Y|X)(x)=x+\frac{7}{2}.$$

类似地，若 $X_1,\cdots,X_n$，Y 为离散型随机变量，它们的联合概率密度函数为

$$f(x_1,\cdots,x_n,y)=\mathbf{P}\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n,Y=y\},$$

且关于 $X_1,\cdots,X_n$ 的边际密度为

$$g(x_1,\cdots,x_n)=\sum_y f(x_1,\cdots,x_n,y),$$

则给定 $X_1,\cdots,X_n$ 下 Y 的条件期望为

$$E(Y|X_1,\cdots,X_n)(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\sum_y y\,f(x_1,\cdots,x_n,y)}{g(x_1,\cdots,x_n)}.$$

若 $x_1,\cdots,x_n$ 是该实验可能出现的一个结果，即若 $g(x_1,\cdots,x_n)>0$，则这一定义是合理的. 同样，我们将 $E(Y|X_1,\cdots,X_n)$ 看做是给定 $X_1,\cdots,X_n$ 条件下对 Y 值的最佳估计.

若 X，Y 为连续型随机变量，其联合密度为 $f(x, y)$ 且边际密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

则可以用类似的方法定义给定 X 条件下 Y 的条件期望

$$E(Y|X)(x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(x,y)\mathrm{d}y}{f_X(x)},$$

同样 $f_X(x)>0$ 时，这一定义是合理的. 类似地，若 X_1，…，X_n，Y 具有联合密度 $f(x_1,\cdots,x_n, y)$，则

$$E(Y|X_1,\cdots,X_n)(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(x_1,\cdots,x_n,y)\mathrm{d}y}{f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)}.$$

条件期望 $E(Y|X_1,\cdots,X_n)$ 具有下面两条性质： [102]

1. 随机变量 $E(Y|X_1,\cdots,X_n)$ 的值仅与 $X_1,\cdots,X_n$ 的值有关，即我们可以写作

$$E(Y|X_1,\cdots,X_n)=\phi(X_1,\cdots,X_n),$$

其中 ϕ 是一函数. 若随机变量 $\mathbf{Z}$ 可表示为 $X_1,\cdots,X_n$ 的函数，则称 $\mathbf{Z}$ 关于 $X_1,\cdots,X_n$ 可测 (measurable). (对于了解测度论的读者，该函数必须是博雷尔 (Borel) 可测的.)

2. 假设 A 为任意一个仅与 X_1，…，X_n 有关的事件. 例如，A 可能是事件

$$A=\{a_1\leqslant X_1\leqslant b_1,\cdots,a_n\leqslant X_n\leqslant b_n\}.$$

记 I_A 为 A 的示性函数，即当 A 发生时其值为 1 否则为 0 的随机变量. 则

$$\mathbf{E}(Y\,I_A)=\mathbf{E}[E(Y|X_1,\cdots,X_n)I_A]. \tag{5.1}$$

让我们来推导上述等式，考虑的情形是 $X_1,\cdots,X_n$，Y 为具有密度 $f(x_1,\cdots,x_n,y)$ 的连续型随机变量，且 A 是上面所述的事件；对于离散型随机变量的推导本质上是一样的.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[E(Y|X_1,\cdots,X_n)I_A]\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\int_{-\infty}^{\infty}E(Y|X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)f(x_1,\cdots,x_n,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}z\,f(x_1,\cdots,x_n,z)\mathrm{d}z}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\cdots,x_n,z)\mathrm{d}z}\right]f(x_1,\cdots,x_n,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1\\
&=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\int_{-\infty}^{\infty}z\,f(x_1,\cdots,x_n,z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1\\
&=\mathbf{E}(Y\,I_A).
\end{aligned}$$

条件 1 和 2 给出了关于条件期望的完整描述.

结论 $E(Y|X_1,\cdots,X_n)$ 是唯一一个仅取决于 $X_1,\cdots,X_n$ 的随机变量，并且对于任意一个仅与 $X_1,\cdots,X_n$ 有关的事件 A 它都满足 (5.1).

在概率的测度理论中，条件期望被定义为满足条件 1 和 2 的随机变量，并且可以证明这样定义的随机变量是唯一的（适用于概率为 0 的事件）. 基于我们的目的，这一特征对于推导条件期望的某些性质是很有用的.

103

我们使概念更加严谨些. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列随机变量，我们用 $\mathcal{F}_n$ 表示“包含在 $X_1,\cdots,X_n$ 中的信息”. 对于 $E(Y|X_1,\cdots,X_n)$，可以写作 $E(Y|\mathcal{F}_n)$. 如果将 (5.1) 应用于由全样本空间构成的事件 A（使得 $I_A=1$)，我们就得到

$$\mathbf{E}[E(Y|\mathcal{F}_n)] = \mathbf{E}(Y). \tag{5.2}$$

条件期望是一个线性运算：如果 a，b 是常数，那么

$$E(aY_1+bY_2|\mathcal{F}_n) = aE(Y_1|\mathcal{F}_n)+bE(Y_2|\mathcal{F}_n). \tag{5.3}$$

为了证明上式，我们只需注意到等式右边关于 $X_1,\cdots,X_n$ 是可测的并且满足 (5.1). 接下来的两个性质可以类似地推导. 若 Y 已经是一个 $X_1,\cdots,X_n$ 的函数，则

$$E(Y|\mathcal{F}_n) = Y. \tag{5.4}$$

对任意的 Y，如果 $m<n$，那么

$$E(E(Y|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_m) = E(Y|\mathcal{F}_m). \tag{5.5}$$

若 Y 与 $X_1,\cdots,X_n$ 是相互独立的，则在确定 Y 的过程中有关 $X_1,\cdots,X_n$ 的信息毫无用处，且

$$E(Y|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(Y). \tag{5.6}$$

从 (5.1) 可以很容易地推出这一性质，因为在此情形下 Y 和 I_A 是相互独立的随机变量. 我们需要的最后一个性质稍微复杂一些：如果 Y 是任意的随机变量且 Z 关于 $X_1,\cdots,X_n$ 是可测的随机变量，那么

$$E(YZ|\mathcal{F}_n) = ZE(Y|\mathcal{F}_n). \tag{5.7}$$

很明显等式右边关于 $X_1,\cdots,X_n$ 是可测的，因此只需证明它满足 (5.1). 这里我们不作证明；基本思想是通过简单函数来逼近 Z，对于简单函数可以很容易推导出 (5.1)，然后求极限就可以得到这个性质.

例 1 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的随机变量，它们的均值为 μ. 令 S_n 为部分和

$$S_n = X_1+\cdots+X_n.$$

令 $\mathcal{F}_n$ 表示在 $X_1,\cdots,X_n$ 中的信息. 设 $m<n$，则由 (5.3)，

$$E(S_n|\mathcal{F}_m) = E(X_1+\cdots+X_m|\mathcal{F}_m)+E(X_{m+1}+\cdots+X_n|\mathcal{F}_m).$$

因为 $X_1+\cdots+X_m$ 是关于 $X_1,\cdots,X_m$ 可测的，由 (5.4)，

104

$$E(X_1+\cdots+X_m|\mathcal{F}_m) = X_1+\cdots+X_m = S_m.$$

又因为 $X_{m+1}+\cdots+X_n$ 与 $X_1,\cdots,X_m$ 是独立的，由 (5.6)，

$$E(X_{m+1}+\cdots+X_n|\mathcal{F}_m) = \mathbf{E}(X_{m+1}+\cdots+X_n) = (n-m)\mu.$$

从而，

$$E(S_n|\mathcal{F}_m) = S_m+(n-m)\mu. \tag{5.8}$$

例 2 设 X_1，X_2，…和 S_n 如例 1 所设. 假设 $\mu=0$ 且 $\mathrm{Var}(X_i)=\mathbf{E}(X_i^2)=\sigma^2$. 令 $m<n$，则由（5.3），

$$E(S_n^2\,|\,\mathcal{F}_m) = E([S_m+(S_n-S_m)]^2\,|\,\mathcal{F}_m)$$
$$= E(S_m^2\,|\,\mathcal{F}_m)+2E(S_m(S_n-S_m)\,|\,\mathcal{F}_m)$$
$$+E((S_n-S_m)^2\,|\,\mathcal{F}_m).$$

由于 S_m 仅取决于 $X_1,\cdots,X_m$ 并且 S_n-S_m 和 X_1，…，X_m 相互独立，像上一个例子一样我们可以得到

$$E(S_m^2\,|\,\mathcal{F}_m) = S_m^2,$$
$$E((S_n-S_m)^2\,|\,\mathcal{F}_m) = \mathbf{E}((S_n-S_m)^2) = \mathrm{Var}(S_n-S_m) = (n-m)\sigma^2.$$

最后，由（5.7）有

$$E(S_m(S_n-S_m)\,|\,\mathcal{F}_m) = S_mE(S_n-S_m\,|\,\mathcal{F}_m) = S_m\mathbf{E}(S_n-S_m) = 0.$$

从而，

$$E(S_n^2\,|\,\mathcal{F}_m) = S_m^2+(n-m)\sigma^2.$$

例 3 考虑例 1 的一种特殊情况，即随机变量 X_i 服从伯努利（Bernoulli）分布，$\mathbf{P}\{X_i=1\}=p$，$\mathbf{P}\{X_i=0\}=1-p$. 同样假设 $m<n$，对于任意的 $i\leqslant m$，考虑 $E(X_i\,|\,S_n)$. 若 $S_n=k$，则在前 n 次试验中出现了 k 个 1. 在给定 $S_n=k$ 的条件下很容易证明条件概率 $\mathbf{P}\{X_i=1\,|\,S_n=k\}=\frac{k}{n}$. 因此，

$$E(X_i\,|\,S_n) = \frac{S_n}{n},$$

且

$$E(S_m\,|\,S_n) = E(X_1\,|\,S_n)+\cdots+E(X_m\,|\,S_n) = \frac{m}{n}S_n.$$

下面我们需要考虑关于一个随机变量无限集合的条件期望

$$E(Y\,|\,X_\alpha,\alpha\in\mathcal{A}).$$

105

记$\mathcal{F}$为 $\{X_\alpha\}$ 中的信息. 若由 $\{X_\alpha\}$ 中的信息能够确定 Z，那么随机变量 Z 是$\mathcal{F}$可测的. 实质上，Z 是$\mathcal{F}$可测的，若 $Z=\phi(X_{\alpha_1},\cdots,X_{\alpha_n})$，$\phi$ 是某函数且 $X_{\alpha_1},\cdots,X_{\alpha_n}$ 是某有限子集，或者若 Z 是这些随机变量的一个极限. 作为一个例子，设 Y，X_1，X_2，…是相互独立的随机变量，X_1，X_2，…服从均值为 0，方差为 1 的正态分布，Y 服从某未知的非平凡分布. 令

$$Z_j = X_j+Y.$$

设$\mathcal{F}_n$ 表示 $Z_1,\cdots,Z_n$ 中的信息并设$\mathcal{F}_\infty$表示 Z_1，Z_2，…中的信息. 在给定 $Z_1,\cdots,Z_n$ 的条件下我们无法确定 Y 的值，因此 Y 不是$\mathcal{F}_n$ 可测的. 然而，Y 是$\mathcal{F}_\infty$可测的，这是因为根据大数定律有

$$Y = \lim_{n\to\infty}\frac{Z_1+\cdots+Z_n}{n}.$$

若$\mathcal{F}$表示包含在 $\{X_\alpha\}$ 中的信息，如果已知 $\{X_\alpha\}$ 的值就可以确定该事件是否已发生，那么我们称事件 A 是$\mathcal{F}$可测的. 这与“示性函数 I_A 是$\mathcal{F}$可测的随机变量”这一说法是等价的. 条件期望 $E(Y\,|\,\mathcal{F})$ 被定义为唯一的$\mathcal{F}$可测随机变量 Z，使得对任意$\mathcal{F}$可测的事件 A，有

$$\mathbf{E}(YI_A) = \mathbf{E}(ZI_A).$$

（5.2）～（5.7）描述的所有性质对于这种更加一般化的条件期望同样成立.

5.2 定义和举例

一个鞅就是一场公平赌博的模型. 我们设 $\{\mathcal{F}_n\}$ 为信息的递增集合. 这意味着对任意的 n，存在随机变量的一个集合$\mathcal{A}_n$ 使得当 $m<n$ 时，$\mathcal{A}_m\subset\mathcal{A}_n$. 在时刻 n 的信息就是$\mathcal{A}_n$ 中所有变量的值. $\mathcal{A}_m\subset\mathcal{A}_n$ 这一假设表明我们不会丢失信息. 随机变量 X 是$\mathcal{F}_n$ 可测的，如果我们知道了$\mathcal{A}_n$ 中所有随机变量的值就可以确定 X 的值. 信息$\mathcal{F}_n$ 的递增序列常称为一个 σ 域流（filtration）.

我们称满足 $\mathbf{E}(|M_i|)<\infty$的随机变量序列 M_0，M_1，M_2，…是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅（martingale），若任意的 M_n 都是关于$\mathcal{F}_n$ 可测的且对任意 $m<n$，

106

$$E(M_n\,|\,\mathcal{F}_m)=M_m, \tag{5.9}$$

或者等价地，

$$E(M_n-M_m\,|\,\mathcal{F}_m)=0.$$

条件 $\mathbf{E}(|M_i|)<\infty$能够确保条件期望的定义是有意义的. 若$\mathcal{F}_n$ 是随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 中的信息，则我们也称 M_0，M_1，…是关于 X_0，X_1，…的鞅. 有时我们只说 M_0，M_1，…是鞅，而没有指明 σ 域流$\mathcal{F}_n$. 这种情形下，意味着序列 M_n 是关于它自身的鞅（此时第一个条件显然成立）. 为了证明（5.9），只需证明对所有的 n，

$$E(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=M_n,$$

因为如果上式成立，由（5.5），

$$\begin{aligned}E(M_{n+2}\,|\,\mathcal{F}_n)&=E(E(M_{n+2}\,|\,\mathcal{F}_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)\\&=E(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)=M_n,\end{aligned}$$

以此类推.

例 1 设 X_1，X_2，…为相互独立的随机变量，且均值都为 μ. 设 $S_0=0$ 且对 $n>0$，S_n 为部分和

$$S_n=X_1+\cdots+X_n.$$

则 $M_n=S_n-n\mu$ 是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅，$\mathcal{F}_n$ 是包含在 X_0，…，X_n 中的信息. 利用 5.1 节例 1 很容易验证这一结论，

$$\begin{aligned}E(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)&=E(S_{n+1}-(n+1)\mu\,|\,\mathcal{F}_n)=E(S_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)-(n+1)\mu\\&=(S_n+\mu)-(n+1)\mu=M_n.\end{aligned}$$

特别地，若 $\mu=0$，则 S_n 是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅.

例 2 下面是"鞅赌博策略"的一种描述，即如何在一场公平赌博中取胜的方式. 设 X_1，X_2，…是相互独立的随机变量且满足

$$\mathbf{P}\{X_i=1\}=\mathbf{P}\{X_i=-1\}=\frac{1}{2}.$$

我们可以将随机变量 X_i 看成是掷一个硬币得到的结果：若出现的是正面则赢得 1 美元，出现反面则输掉 1 美元. 此游戏要获胜的一种方法是将赌本不断地翻倍直到我们最终赢得比赛. 在

107

取胜的那局比赛中停止游戏. 设 W_n 为利用此策略掷 n 次硬币获得的收益（或者损失），$W_0=0$. 一旦我们获胜，则停止游戏，因此我们的收益停止变化且

$$\mathbf{P}\{W_{n+1}=1\mid W_n=1\}=1.$$

现在假设在硬币的前 n 次投掷中出现的均为背面. 每投一次我们的赌金都相应地在上一次的基础上翻一倍，因而我们已经损失了 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 元并且 $W_n=-(2^n-1)$. 此时我们仍将赌金翻一倍且下一次投掷的赌本为 2^n. 即

$$\mathbf{P}\{W_{n+1}=1\mid W_n=-(2^n-1)\}=\frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}\{W_{n+1}=-(2^{n+1}-1)\mid W_n=-(2^n-1)\}=\frac{1}{2}.$$

从而容易证明

$$E(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=W_n,$$

因此 W_n 是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅.

例 3 我们将前面的例子一般化. 设 X_1，X_2，…如例 2 所设. 假设第 n 次投掷时我们的赌金为 B_n. 要确定赌金的数量，我们只需要知道前 $n-1$ 次的投掷结果，而不需要知道之后的投掷结果. 换言之，B_n 是关于$\mathcal{F}_{n-1}$可测的随机变量（我们假定 B_1 是一个常数）. 给定 $W_0=0$，n 次投掷后的收益 W_n 为

$$W_n=\sum_{j=1}^{n}B_jX_j.$$

我们允许 B_n 为负的；也即对应的是硬币将会出现背面. 假设 $\mathbf{E}(|B_n|)<\infty$(如果在时刻 n 的赌金小于某常数 C_n，则能保证此条件成立)，则 W_n 是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅. 要证明这一点，首先我们从对任意 n，$\mathbf{E}(|B_n|)<\infty$这一事实可以看到 $\mathbf{E}(|W_n|)<\infty$. 显然 W_n 是$\mathcal{F}_n$ 可测的. 最后，

$$\begin{aligned}E(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)&=E\Big(\sum_{j=1}^{n+1}B_jX_j\mid\mathcal{F}_n\Big)\\&=E\Big(\sum_{j=1}^{n}B_jX_j\mid\mathcal{F}_n\Big)+E\Big(B_{n+1}X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\Big).\end{aligned}$$

由 (5.4)，

$$E\Big(\sum_{j=1}^{n}B_jX_j\mid\mathcal{F}_n\Big)=\sum_{j=1}^{n}B_jX_j=W_n.$$

108

由于 B_{n+1}是$\mathcal{F}_n$ 可测的，因此根据 (5.6) 和 (5.7) 可以得到

$$E(B_{n+1}X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=B_{n+1}E(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=B_{n+1}\mathbf{E}(X_{n+1})=0.$$

从而

$$E(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=W_n.$$

例 4 **Polya 坛子**. 考虑一个装有红绿两种颜色球的坛子. 假设开始的时候在坛中两种颜色的球各有一个. 每次从坛中随机地摸出一球. 如果摸出的是红球，则将其放回并且额外地再往坛中放入另外一个红球. 类似地，如果摸出的是绿球，则将此绿球放回并往坛中再加入一个绿球. 设 X_n 为 n 次摸球之后坛中的红球数，则 $X_0=1$ 且 X_n 是一个（时齐的）马尔可夫链，其转移概率为

$$\mathbf{P}\{X_{n+1}=k+1\mid X_n=k\}=\frac{k}{n+2},$$

$$\mathbf{P}\{X_{n+1}=k\,|\,X_n=k\}=\frac{n+2-k}{n+2}.$$

令 $M_n=\frac{X_n}{(n+2)}$ 为 n 次摸球之后坛中红球所占的比例，则 M_n 是一个鞅. 要证明这点，注意到

$$E(X_{n+1}\,|\,X_n)=X_n+\frac{X_n}{n+2}.$$

由于 X_n 是一个马尔可夫链，$\mathcal{F}_n$ 中决定 X_{n+1} 的所有相关信息都包含在 X_n 里，从而，

$$\begin{aligned}E(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)&=E((n+3)^{-1}X_{n+1}\,|\,X_n)\\&=\frac{1}{n+3}\left[X_n+\frac{X_n}{n+2}\right]\\&=\frac{X_n}{n+2}=M_n.\end{aligned}$$

满足 $\mathbf{E}(|M_n|)<\infty$ 的过程 M_n 称为关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的下鞅（submartingale）（上鞅（supermartingale）），若对任意的 $m<n$，$E(M_n\,|\,\mathcal{F}_m)\geqslant(\leqslant)M_m$. 也就是说，下鞅是对玩家的“有利”赌博而上鞅则是“不利”赌博. 注意 M_n 是鞅当且仅当 M_n 既是下鞅又是上鞅.

例 5 设 X_n 为有限状态空间上的一个马尔可夫链. 假设收益函数 f 如第 4 章所给定的，令 v 是与收益函数相互联系的价值函数，$v(x)=E(f(X_T)\,|\,X_0=x)$，其中 T 是最优策略下的停时. 则 $M_n=v(X_n)$ 是关于 X_0，X_1，…的上鞅.

109

5.3 可选抽样定理

可选抽样定理说得明白些就是“在一场公平赌博中，你无法取胜”. 然而，容易看出这一说法在完整的一般理论中是不正确的. 例如，假设某人进行抛硬币的公平游戏，如果硬币出现正面则赢得赌金但如果出现的是背面则输掉赌金. 那么利用如 5.2 节例 2 所述的“鞅赌博策略”，可以确保此人提前完成游戏.

关于 σ 域流 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的停时 T 是在非负整数集上取值的随机变量（作为一个可能的值我们允许 $T=\infty$），T 给出的是某一进程停止的时刻（$T=\infty$ 对应的是永不停止），使得仅利用时刻 n 的信息就能决定在时刻 n 是否停止. 说得更准确些，我们称 T 为停时（关于 $\{\mathcal{F}_n\}$），若对任意的 n，事件 $\{T=n\}$ 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测.

例 1 设 k 为整数且令 $T=k$.

例 2 设 A 为集合且令 $T_A=\min\{j:X_j\in A\}$.

例 3 若 T 和 U 是停时，则 $\min\{T,U\}$ 和 $\max\{T,U\}$ 也是停时. 特别地，如果 T 是停时且 $T_n=\min\{T,n\}$，则所有的 T_n 都是停时，$T_0\leqslant T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots$ 且 $T_n\leqslant n$.

可选抽样（或者可选停时）定理是指（在特定的条件下）若 M_n 是鞅且 T 是停时，则 $\mathbf{E}(M_T)=\mathbf{E}(M_0)$. 但这一结论并不是在所有条件下都成立，例如我们考虑鞅赌博策略且令 T 为硬币首次出现正面的时刻，则 $1=\mathbf{E}(M_T)\neq\mathbf{E}(M_0)=0$. 我们想要证明的第一件事就是如果只有有限的时间，那么此人不可能在这场公平游戏中获胜.

结论 设 M_0，M_1，…是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅，T 是停时，假设 T 有界，$T\leqslant K$，则

$$E(M_T\,|\,\mathcal{F}_0) = M_0.$$

特别地，$\mathbf{E}(M_T)=\mathbf{E}(M_0)$.

要证明上述结论，首先我们看到事件 $\{T>n\}$ 是关于$\mathcal{F}_n$ 可测的（因为我们只需要直到时刻 n 的信息来决定在时刻 n 之前是否已停止）. 由于随机变量 M_T 在 $T=j$ 时等于 M_j，因此可以写成

$$M_T = \sum_{j=0}^{K} M_j I\{T = j\}.$$

110

接下来我们求其关于$\mathcal{F}_{K-1}$的条件期望，

$$E(M_T\,|\,\mathcal{F}_{K-1}) = E(M_K I\{T = K\}\,|\,\mathcal{F}_{K-1}) + \sum_{j=0}^{K-1} E(M_j I\{T = j\}\,|\,\mathcal{F}_{K-1}).$$

当 $j\leqslant K-1$ 时，$M_jI\{T=j\}$ 是$\mathcal{F}_{K-1}$可测的；所以

$$E(M_j I\{T = j\}\,|\,\mathcal{F}_{K-1}) = M_j I\{T = j\}.$$

由于已知 T 是不超过 K 的，所以事件 $\{T=K\}$ 等价于事件 $\{T>K-1\}$. 后者是关于$\mathcal{F}_{K-1}$可测的. 从而，由（5.7），

$$\begin{aligned} E(M_K I\{T = K\}\,|\,\mathcal{F}_{K-1}) &= E(M_K I\{T > K-1\}\,|\,\mathcal{F}_{K-1}) \\ &= I\{T > K-1\}E(M_K\,|\,\mathcal{F}_{K-1}) = I\{T > K-1\}M_{K-1}. \end{aligned}$$

从 M_n 是鞅这一事实可知，上面最后一个等式成立. 所以

$$\begin{aligned} E(M_T\,|\,\mathcal{F}_{K-1}) &= I\{T > K-1\}M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-1} M_j I\{T = j\} \\ &= I\{T > K-2\}M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-2} M_j I\{T = j\}. \end{aligned}$$

如果我们继续讨论下去，这次是关于$\mathcal{F}_{K-2}$求条件期望，我们得到

$$\begin{aligned} E(M_T\,|\,\mathcal{F}_{K-2}) &= E(E(M_T\,|\,\mathcal{F}_{K-1})\,|\,\mathcal{F}_{K-2}) \\ &= I\{T > K-3\}M_{K-2} + \sum_{j=0}^{K-3} M_j I\{T = j\}. \end{aligned}$$

继续这一过程直到我们得到

$$E(M_T\,|\,\mathcal{F}_0) = M_0.$$

在许多有趣的例子中，停时 T 不是有界的. 假设 T 是满足 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$ 的一个停时，即确保它能最终停下来.（注意：与鞅赌博策略相应的停时满足这个条件.）那么我们何时能够推出 $\mathbf{E}(M_T)=\mathbf{E}(M_0)$ 呢？为此考虑停时 $T_n=\min\{T,\ n\}$. 注意到

111

$$M_T = M_{T_n} + M_T I\{T > n\} - M_n I\{T > n\}.$$

所以，

$$\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}(M_{T_n}) + \mathbf{E}(M_T I\{T > n\}) - \mathbf{E}(M_n I\{T > n\}).$$

由于 T_n 是一个有界停时，因此它满足上面的结论 $\mathbf{E}(M_{T_n})=\mathbf{E}(M_0)$. 因此我们希望能够指出当 $n\to\infty$时其余两项不起作用. 对于第二项问题不大，因为当 $n\to\infty$时，事件 $\{T>n\}$ 发生的概

率趋于 0，从而我们是将随机变量 M_T 限制在越来越小的集合中取期望的．可以证明（见 5.4 节）当 $\mathbf{E}(|M_T|)<\infty$ 时 $\mathbf{E}(|M_T|I\{T>n\})\to 0$.

第三项稍微有点麻烦．再次考虑 5.2 节例 2．在这个例子中，事件 $\{T>n\}$ 是指前 n 次抛掷出现的均为背面，且该事件发生的概率为 2^{-n}．如果此事件发生，那么玩家已经损失了 2^n-1 元，即 $M_n=1-2^n$．因此

$$\mathbf{E}(M_n I\{T>n\}) = 2^{-n}(1-2^n),$$

当 $n\to\infty$ 时上式不会趋于 0．这也是为什么在这种情况下想要的结果不成立的原因．然而，若给定的 M_n 和 T 满足

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|M_n|I\{T>n\}) = 0,$$

则我们可以推导出 $\mathbf{E}(M_T)=\mathbf{E}(M_0)$．进而可以将其总结如下：

可选抽样定理 设 M_0，M_1，…是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅，停时 T 满足 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$，

$$\mathbf{E}(|M_T|) < \infty, \tag{5.10}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|M_n|I\{T>n\}) = 0. \tag{5.11}$$

则 $\mathbf{E}(M_T)=\mathbf{E}(M_0)$.

例 1 设 X_n 是 $\{0，\cdots，N\}$ 上带有吸收壁的一个简单随机游动（$p=\frac{1}{2}$），假设 $X_0=a$，则 X_n 是一个鞅．令 $T=\min\{j：X_j=0$ 或 $N\}$，T 是一停时，且由于 X_n 是有界的，(5.10) 和 (5.11) 均满足 [注意：若此鞅是有界的且 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$，则 (5.10) 和 (5.11) 总是满足的]．从而

112

$$\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}(M_0) = a.$$

但是在这种情况下 $\mathbf{E}(M_T)=N\mathbf{P}\{X_T=N\}$．从而

$$\mathbf{P}\{X_T = N\} = \frac{a}{N}.$$

上面给出的是另外一种对于简单随机游动赌徒输光结果的推导方式．

例 2 设 X_n 如例 1 所设，且令 $M_n=X_n^2-n$．则 M_n 是关于 X_n 的鞅．要证明此结论，由 5.1 节例 2 可知，

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2-(n+1)|\mathcal{F}_n\} = X_n^2+1-(n+1) = M_n.$$

同样，令 $T=\min\{j：X_j=0$ 或 $N\}$，在这种情况下，M_n 不是一个有界鞅，因此不能立即推出 (5.10) 和 (5.11) 成立．然而，我们可以证明（习题 1.7）存在 $C<\infty$ 及 $\rho<1$，使得

$$\mathbf{P}\{T>n\} \leqslant C\rho^n.$$

由于 $|M_n|\leqslant N^2+n$，从而可以证明 $\mathbf{E}(|M_T|)<\infty$ 且

$$\mathbf{E}(|M_n|I\{T>n\}) \leqslant C\rho^n(N^2+n) \to 0.$$

所以可选抽样定理的条件成立且我们可以推出

$$\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}(M_0) = a^2.$$

注意到

$$\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}(X_T^2) - \mathbf{E}(T) = N^2\mathbf{P}\{X_T = N\} - \mathbf{E}(T) = aN - \mathbf{E}(T).$$

所以，

$$\mathbf{E}(T)=aN-a^2=a(N-a).$$

例 3 设 X_n 为整数 $\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 上的简单随机游动$\left(p=\frac{1}{2}\right)$且 $X_0=0$，我们已经看到它是一个鞅. 令 $T=\min\{j: X_j=1\}$，由于简单随机游动是常返的，因此 $P\{T<\infty\}=1$. 而 $X_T=1$，因此

$$1=\mathbf{E}(X_T)\neq\mathbf{E}(X_0)=0.$$

从而，可选抽样定理的条件不能成立. 这里我们不给出详细的说明，但在 $\mathbf{P}\{T>n\}\sim cn^{-\frac{1}{2}}$（其中 c 为常数）时可以证明. 根据中心极限定理，随机游动经过 n 步移动的距离与$\sqrt{n}$同阶. 这种情况下，$\mathbf{E}(|X_n|I\{T>n\})$ 不会趋于 0.

113

例 4 可以将例 1 拓展到一般的马尔可夫链. 设 $\mathbf{P}$ 为有限状态空间 S 上不可约马尔可夫链 X_n 的转移矩阵. 令 A 是 S 的一个子集且 F 是从 A 到 $\mathbf{R}$ 的某函数，则存在 S 上的唯一函数 f 满足

$$f(x)=F(x),\quad x\in A,$$

$$\mathbf{P}f(x):=\sum_{y\in A}p(x,y)f(y)=0,\quad x\in S\setminus A.$$

如果读者意识到最后这个方程是带有 k 个未知数的 k 个方程，那么一点也不会惊讶，其中 k 是集合 $S\setminus A$ 中元素的个数. 假设 f 满足这些条件，令 $T=\min\{n\geqslant 0: X_n\in A\}$ 且 $T_n=\min\{n, T\}$，设 $M_n=f(X_{T_n})$，则 M_n 是一个有界鞅，因此

$$f(x)=\mathbf{E}[M_0\mid X_0=x]=\mathbf{E}[M_T\mid X_0=x]=\mathbf{E}[f(X_T)\mid X_0=x].$$

5.4 一致可积

条件（5.11）往往很难验证. 基于这点，我们希望给出相对容易证明的条件，并且从这些条件可以推出（5.11）. 我们首先来考虑一个随机变量 X，它满足 $\mathbf{E}(|X|)<\infty$. 设 $|X|$ 的分布函数为 F，则下式成立：

$$\lim_{K\to\infty}\mathbf{E}(|X|I\{|X|>K\})=\lim_{K\to\infty}\int_K^{\infty}|x|\,\mathrm{d}F(x)=0.$$

现在假设有一列随机变量 X_1，X_2，…，我们称此序列是**一致可积的**（uniformly integrable），若对任意 $\varepsilon>0$，存在一个 K，使得对所有的 n 有，

$$\mathbf{E}[|X_n|I\{|X|>K\}]<\varepsilon.$$

上式成立的关键在于 K 的取值不能依赖于 n. 若 X_1，X_2，…是一致可积的，则下面的结论成立：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\mathbf{P}(A)<\delta$ 时，

$$\mathbf{E}(|X_n|I_A)<\varepsilon \tag{5.12}$$

对所有的 n 都成立. 同样，δ 不依赖于 n 且（5.12）对 n 的所有取值都必须成立. 要证明一致可积蕴涵着这一结论，可以令 $\varepsilon>0$ 且选取足够大的 K，使得对所有的 n 有 $\mathbf{E}[|X_n|I\{|X_n|>K\}]<\frac{\varepsilon}{2}$. 若令 $\delta=\frac{\varepsilon}{(2K)}$，则当 $\mathbf{P}(A)<\delta$ 时，

$$\mathbf{E}(|X_n|I_A)\leqslant\mathbf{E}(|X_n|I_A;|X_n|\leqslant K)+\mathbf{E}(|X_n|;|X_n|>K)$$

$$<K\mathbf{P}(A)+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)<\varepsilon.$$

114

为了加深对这一定义的理解，我们先给出一个不是一致可积的随机变量的例子．考虑 5.2 节例 2，鞅赌博策略，考虑随机变量 W_0，W_1，W_2，…，如果设 A_n 为事件 $\{X_1=X_2=\cdots=X_n=-1\}$，则 $\mathbf{P}(A_n)=2^{-n}$ 且 $\mathbf{E}(|W_n|I_{A_n})=2^{-n}(2^n-1)\to 1$．显然对任意的 $\varepsilon<1$，不能满足一致可积的条件．

现在假设 M_0，M_1，…是关于 X_0，X_1，…的一致可积鞅，并且 T 是满足 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$ 的停时．则

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{T>n\}=0,$$

所以由一致可积性可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|M_n|I\{T>n\})=0;$$

就是说，(5.11) 成立．从而我们给出可选抽样定理的另一种叙述．

可选抽样定理　设 M_0，M_1，…是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的一致可积鞅且 T 是满足 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$ 的停时，$\mathbf{E}(|M_T|)<\infty$，则 $\mathbf{E}(M_T)=\mathbf{E}(M_0)$．

一致可积的条件很难验证．但却有许多相对容易验证并且包含一致可积性的条件．这里我们给出一个，此外还在习题（习题 5.15）里给出了另外一个．

结论　若 X_1，X_2，…是一列随机变量，存在一个 $C<\infty$，使得 $\mathbf{E}(X_n^2)<C$ 对所有的 n 成立，则该序列是一致可积的．

要证明上式，给定 $\varepsilon>0$ 且令 $\delta=\frac{\varepsilon^2}{4C}$．若 $\mathbf{P}(A)<\delta$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|X_n|I_A) &= \mathbf{E}\left[|X_n|I\left(A\cap\left\{|X_n|\geqslant\frac{2C}{\varepsilon}\right\}\right)\right]\\ &\quad+\mathbf{E}\left[|X_n|I\left(A\cap\left\{|X_n|<\frac{2C}{\varepsilon}\right\}\right)\right]\\ &\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)\mathbf{E}\left[|X_n|^2I\left(A\cap\left\{|X_n|\geqslant\frac{2C}{\varepsilon}\right\}\right)\right]\\ &\quad+\left(\frac{2C}{\varepsilon}\right)\mathbf{P}\left(A\cap\left\{|X_n|<\frac{2C}{\varepsilon}\right\}\right)\\ &\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)\mathbf{E}(|X_n|^2)+\left(\frac{2C}{\varepsilon}\right)\mathbf{P}(A)<\varepsilon.\end{aligned}$$

例 1　**随机调和序列**．众所周知调和序列 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 是发散的，而交替的调和序列 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 是收敛的．若将加减随机地排列，那结果又将如何呢？为此，设 X_1，X_2，…是独立的随机变量且 $\mathbf{P}\{X_i=1\}=\mathbf{P}\{X_i=-1\}=\frac{1}{2}$．令 $M_0=0$，对 $n>0$，

115

$$M_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}X_j.$$

根据 5.2 节例 1 知，M_n 是鞅．由于 $\mathbf{E}(M_n)=0$，

$$\mathbf{E}(M_n^2) = \mathrm{Var}(M_n^2) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}\left(\frac{1}{j}X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty.$$

从而 M_n 是一致可积鞅. 收敛的问题我们将在下节讨论.

例 2 **分支过程**. 令 X_n 为分支过程中（见 2.4 节）第 n 代的个体数，且每个个体产生后代的分布有均值 μ 和方差 σ^2. 则 $M_n=\mu^{-n}X_n$（习题 5.5）是关于 X_1，X_2，…的鞅，假设 $\mu>1$. 则（习题 5.11）存在一个常数使得对所有的 n，$\mathbf{E}(M_n^2)<\infty$，从而对于 $\mu>1$，M_n 是一致可积鞅.

5.5 鞅收敛定理

鞅收敛定理说的是在很一般的条件下，鞅 M_n 会收敛到一个极限随机变量 M_∞. 我们首先考虑一个特殊的例子，Polya 坛子（5.2 节例 4）. 在这种情形下 M_n 是第 n 次摸球后坛中红球所占的比例. 当 n 变大时，这个比例会如何变化呢？在习题 5.12 中证明了 M_n 的分布对于较大 n 值会近似于 [0，1] 上的均匀分布. 因此我们会想：红球所占的比例会在 0 和 1 之间无限地跳跃吗？又或者这个比例最终会到达一个特定值吗？接下来我们将证明后者是成立的.

设 $0<a<b<\infty$ 且 $M_n<a$，T 为停时

$$T = \min\{j : j \geqslant n\ ,\quad M_j \geqslant b\},$$

令 $T_m=\min\{T，m\}$，则对 $m>n$，由可选抽样定理知

$$\mathbf{E}(M_{T_m}) = M_n < a.$$

但是

$$\mathbf{E}(M_{T_m}) \geqslant \mathbf{E}(M_{T_m} I\{T \leqslant m\}) = \mathbf{E}(M_T I\{T \leqslant m\}) \geqslant b\mathbf{P}\{T \leqslant m\}.$$

所以，

$$\mathbf{P}\{T \leqslant m\} < \frac{a}{b}.$$

116

由于上式对所有的 m 都成立，从而

$$\mathbf{P}\{T < \infty\} \leqslant \frac{a}{b}.$$

这说明至少以概率 $1-\left(\frac{a}{b}\right)$ 红球的比例永远不会超过 b. 现在假设红球的比例确定超过了 b，那么它能够再一次降回到 a 以下的概率是多少？同样的讨论应用于绿球的比例，则降到 a 以下的概率最大为 $\frac{(1-b)}{(1-a)}$. 继续同样的讨论，我们可以知道，从 a 出发超过 b，再小于 a，再大于 b，再小于 a，循环 n 次的概率为

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-b}{1-a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-b}{1-a}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-b}{1-a}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^n,$$

当 $n\to\infty$ 时此概率趋于 0，从而它是有上界的. 因此，这一比例不会在 a 和 b 之间无限地跳跃. 由于 a，b 是任意的，这表明该比例不会在任意两个数之间无限地跳跃，换言之，极限

$$M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$$

存在. 这一极限 M_∞ 是随机变量；不难证明（见习题 5.12）M_∞ 服从 [0，1] 上的均匀分布.

下面我们给出一般的结论.

鞅收敛定理 设 M_0，M_1，…是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅，并且存在常数 $C<\infty$ 使得 $\mathbf{E}(|M_n|)<C$ 对所有的 n 成立. 则存在随机变量 M_∞ 使得

$$M_n \to M_\infty.$$

注意到极限随机变量 M_∞ 是关于 M_0，M_1，…可测的. 该定理的证明与上面的讨论类似. 下面我们要证的是对任意 $0<a<b<\infty$，此鞅在 a 和 b 之间无限地跳跃的概率为 0. 因为对所有的 $a<b$ 这一结论都成立，因此必须满足的是：鞅 M_n 收敛到某个值 M_∞.

固定 $a<b$，考虑下面的赌博策略，即鞅赌博策略. 我们将 M_n 看做某给定公平赌博的累加结果且将 $M_{n+1}-M_n$ 看做赌博在第 $n+1$ 次的结果. 当 $M_n<a$ 时，在鞅上加赌注 1，继续这一过程直到鞅超过 b. 一旦鞅超过 b 则停止加注，直到鞅的取值再次下降到 a 以下；这时将赌注变回 1. 继续此过程，当超过 b 时，赌注变为 0；当小于 a 时，赌注变回 1. 注意：若这个鞅在 a 和 b 之间无限地跳跃，则给出的策略能够从此公平赌博中获得长期的收益. [117]

在此策略下，经过 n 步之后获得的收益为

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} B_j(M_j - M_{j-1}),$$

其中 B_j 是赌本，当鞅目前处于 a 以下时它取值为 1，当鞅处于 b 以上时它取值为 0. 按照 5.2 节例 3 的做法，可以证明 W_n 是关于 M_0，M_1，…的鞅. 我们注意到

$$W_n \geqslant (b-a)U_n - |M_n - a|,$$

其中 U_n 是鞅穿越 a 和 b 之间的次数（通常称为上穿（upcrossing）次数），而 $|M_n-a|$ 给出了对最后一个时间区间损失的估计值（如果赌徒在时刻 n 下的赌注为 1，那么此估计值有意义）. 因为 W_n 是鞅，从而有

$$\mathbf{E}(W_0) = \mathbf{E}(W_n) \geqslant (b-a)\mathbf{E}(U_n) - \mathbf{E}(|M_n - a|).$$

因为 $\mathbf{E}(|M_n-a|)\leqslant\mathbf{E}(|M_n|)+a\leqslant C+a$，可以得到

$$\mathbf{E}(U_n) \leqslant \frac{\mathbf{E}(W_0) + C + a}{b-a}.$$

由于上式对所有的 n 都成立，所以当 $n\to\infty$ 时，期望上穿次数也是有界的，从而以概率 1 上穿次数是有限的. 这就证明了定理.

鞅的性质意味着对任意的 n，有 $\mathbf{E}(M_n)=\mathbf{E}(M_0)$. 然而，$\mathbf{E}(M_\infty)=\mathbf{E}(M_0)$ 并非在所有情况下都成立. 对于一个反例，我们回到鞅赌博策略. 在这种情形下，

$$W_\infty = \lim_{n\to\infty} W_n = 1,$$

因此 $\mathbf{E}(W_\infty)\neq\mathbf{E}(W_0)=0$. 若鞅是一致可积的，“极限随机变量具有与其相同的期望”这一结论是成立的（见习题 5.13）.

结论 若 M_n 是关于 X_0，X_1，…的一致可积鞅，则

$$M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$$

存在且 $\mathbf{E}(M_\infty)=\mathbf{E}(M_0)$. [118]

例 1 设 X_n 为分支过程中第 n 代的个体数，且后代的分布有均值 μ 和方差 σ^2. 假设 $X_0=1$

且令 $M_n=\mu^{-n}X_n$ 是相对应的鞅. 若 $\mu\leqslant 1$，我们知道以概率 1 灭绝发生，因此 $M_n\to M_\infty=0$. 此时 $\mathbf{E}(M_\infty)\neq\mathbf{E}(M_0)$. 在 5.4 节，我们得到当 $\mu>1$ 时，M_n 是一致可积鞅，从而 M_∞ 是满足 $\mathbf{E}(M_\infty)=1$ 的非平凡随机变量.

例 2 设 X_1，X_2，…是相互独立的随机变量，且满足 $\mathbf{P}\{X_i=1\}=\mathbf{P}\{X_i=-1\}=\frac{1}{2}$，令 M_n 为随机调和序列

$$M_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}X_j.$$

从 5.4 节我们知道 M_n 是一致可积鞅. 所以 M_n 趋近于随机变量 M_∞. 也就是说随机调和序列以概率 1 收敛.

例 3 设 M_n 为 Polya 坛子模型中红球所占的比例. 在这种情形下，假设在时刻 $n=0$ 有 k 个红球以及 m 个绿球（因此经过 n 次摸球后有 $n+k+m$ 个球）. 由于 M_n 是有界的，从而容易看出 M_n 是一个一致可积鞅且 M_n 趋近于随机变量 M_∞，$\mathbf{E}(M_\infty)=\mathbf{E}(M_0)=\frac{k}{(k+m)}$. 可以证明（见下面的例 7）$M_\infty$ 的分布是参数为 k 和 m 的 beta 分布，即具有密度

$$\frac{(k+m-1)!}{(k-1)!\,(m-1)!}x^{k-1}\,(1-x)^{m-1},\quad 0<x<1.$$

例 4 设 M_n 是关于 X_0，X_1，…的鞅，T 是满足 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$ 的停时，令 $T_n=\min\{n,T\}$ 且 $Y_n=M_{T_n}$，则 $Y_n\to Y_\infty$，其中 $Y_\infty=M_T$. 如我们在可选抽样定理中看到的一样，并非所有情况下 $\mathbf{E}(Y_\infty)=\mathbf{E}(Y_0)$. 然而，当 M_n 是一致可积鞅时，$\mathbf{E}(Y_\infty)=\mathbf{E}(Y_0)$ 成立.

例 5 设 X_n 是可数无限状态空间 S 上不可约马尔可夫链，其转移函数为 $p(x,y)$. 称函数 f 在 x 处调和（harmonic），若

$$f(x)=\sum_{y\in S}p(x,y)f(y).$$

在第 2 章我们考虑了此链是否为常返这一问题. 现在证明前面得到的一个结论. 设 z 是 S 上的一个固定状态，$u(x)$ 为该链从 x 出发能够到达状态 z 的概率. 换言之，若

$$T=\min\{j\geqslant 0:X_j=z\},$$

119

则

$$u(x)=\mathbf{P}\{T<\infty\mid X_0=x\}.$$

如之前我们得到的，$u(z)=1$ 且在任意 $x\neq z$ 处 $u(x)$ 是调和的.

假设现在能够找到某函数 v 满足：

$$v(z)=1,\tag{5.13}$$

$$0\leqslant v(x)\leqslant 1,\tag{5.14}$$

$$v(x)=\sum_{y\in S}p(x,y)v(y),\quad x\neq z.\tag{5.15}$$

若 T 为如上所定义，$T_n=\min\{n,T\}$，可以验证 $M_n=v(X_{T_n})$ 是关于 X_0，X_1，…的鞅. 由于 v 是有界的，所以 M_n 是一致可积的且

$$\lim_{n\to\infty}M_n=M_\infty$$

存在，且 $\mathbf{E}(M_\infty)=\mathbf{E}(M_0)$.

如果该链是常返的，那么 $\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$ 且 $M_\infty=v(z)=1$. 所以当 $X_0=x$ 时，$1=\mathbf{E}(M_0)=v(x)$. 从而，在此链为常返的情况下，方程 (5.13)～(5.15) 没有非平凡解.

例 6 设 X_1，X_2，…为相互独立的随机变量，且

$$\mathbf{P}\left\{X_i=\frac{3}{2}\right\}=\mathbf{P}\left\{X_i=\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}.$$

设 $M_0=1$ 且对 $n>0$，令 $M_n=X_1\cdots X_n$. 注意到 $\mathbf{E}(M_n)=\mathbf{E}(X_1)\cdots\mathbf{E}(X_n)=1$，事实上，若记$\mathcal{F}_n$为包含在 X_1，…，X_n 中的信息，则

$$\begin{aligned}E(M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)&=E(X_1\cdots X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)\\&=X_1\cdots X_nE(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)\\&=X_1\cdots X_n\mathbf{E}(X_{n+1})=M_n.\end{aligned}$$

因此 M_n 是关于 X_1，X_2，…的鞅. 又因为 $\mathbf{E}(|M_n|)=\mathbf{E}(M_n)=1$，所以鞅收敛定理的条件成立，从而

120

$$M_n\to M_\infty,$$

其中 M_∞是一个随机变量. 那么 M_n 是否一致可积呢？回答是否定的；实际上，极限随机变量 $M_\infty=0$[因此 $\mathbf{E}(M_\infty)\neq\mathbf{E}(M_0)$]. 要证明这点，可以考虑鞅的自然对数，

$$\ln M_n=\sum_{j=1}^n\ln X_j.$$

等式右边是独立同分布的随机变量之和，且均值为

$$\mathbf{E}(\ln X_i)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}<0.$$

由大数定律知，$\ln M_n\to-\infty$，从而 $M_n\to 0$.

注意在这种情况下，

$$\mathbf{E}(M_n^2)=\mathbf{E}(X_1^2)\cdots\mathbf{E}(X_n^2)=\left(\frac{5}{4}\right)^n,$$

因此二阶矩并非一致有界.

例 7 统计学中的一个典型问题是给定一个分布中的独立样本

$$Y_1,Y_2,Y_3,\cdots,$$

估计出此分布的均值 θ. 在贝叶斯 (Bayes) 统计中，将参数 θ 看成是具有特定分布的随机变量，并称此分布为*先验分布* (prior distribution). 假设在先验分布的条件下 $\mathbf{E}[\theta]=\mu$. 设 $M_0=\mu$ 且

$$M_n=E[\theta\mid Y_1,\cdots,Y_n].$$

则 M_n 是鞅. 给定 $Y_1=y_1$，…，$Y_n=y_n$，M_n 上的条件分布称为*后验分布* (posterior distribution). 鞅收敛定理告诉我们

$$\lim_{n\to\infty}M_n=M_\infty$$

对某个依赖于无限序列 $\{Y_1, Y_2, \cdots\}$ 上的随机变量成立. 此外，可以证明 $M_n=\mathbf{E}[M_\infty\mid Y_1,\cdots,Y_n]$. 强大数定律告诉我们对于固定的 θ，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}=\theta.$$

也就是说，随机变量 θ 可以由无穷序列的值所确定．从而给出 $M_\infty=\theta$，

$$\lim_{n\to\infty}E[\theta|Y_1,\cdots,Y_n]=\theta.$$

121

作为一个例子，假设 Y_1，Y_2，…是伯努利分布中的独立样本，$\mathbf{P}\{Y_j=1\}=1-\mathbf{P}\{Y_j=0\}=\theta$. 假如我们没有任何关于 θ 的先验知识，可以假定 θ 是服从 [0，1] 上的均匀分布的随机变量．对于固定的 θ，

$$\mathbf{P}\{Y_1+\cdots+Y_n=k\}=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

令 $f_n(\theta|k)$ 为给定条件 $Y_1+\cdots+Y_k=n$ 下 θ 的条件密度．由贝叶斯定理知，

$$f_n(\theta|k)=\frac{\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}}{\int_0^1\binom{n}{k}\theta_1^k(1-\theta_1)^{n-k}\mathrm{d}\theta_1}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

将其称为参数是 $k+1$ 和 $n-k+1$ 的 β 分布．通过直接计算可知，此分布的均值为 $\frac{(k+1)}{(n+2)}$．注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{Y_{n+1}=k+1|Y_n=k\}&=\int_0^1\mathbf{P}\{Y_{n+1}=1|\theta\}f_n(\theta|k)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1\theta f_n(\theta|k)\mathrm{d}\theta=\frac{k+1}{n+2}.\end{aligned}$$

若我们令 Y_n+1 表示坛中的红球数，$(n-Y_n)+1$ 是坛中的绿球数，则可以确切得到 Polya 坛子的转移概率．

5.6 极大不等式

设 M_0，M_1，M_2，…为一列随机变量，定义极大过程（maximum process）为

$$\overline{M}_n=\max\{M_0,\cdots,M_n\},\quad M_n^*=\max\{|M_0|,\cdots,|M_n|\}.$$

极大不等式描述的是 $\overline{M}_n$，M_n^* 的概率或期望与 M_n 或 $|M_n|$ 的概率或期望之间的关系．这里我们给出两个例子，即反射原理（reflection principle）以及杜布极大不等式（Doob maximal inequality）．证明的基本思想如下：若 M_n 为鞅或者下鞅，且对某个 $j\leqslant n$ 有 M_j 很大，则 M_n 也会很大．利用停时能够使讨论更加准确．

反射原理 设 X_1，X_2，…为相互独立的随机变量，且它们的分布关于原点对称，令 $M_0=0$，$M_n=X_1+\cdots+X_n$，则对任意的 $a>0$，

$$\mathbf{P}\{\overline{M}_n\geqslant a\}\leqslant 2\mathbf{P}\{M_n\geqslant a\}.$$

122

要证上式成立，可令 T 为满足 $M_j\geqslant a$ 的最小 j，注意到

$$\mathbf{P}\{\overline{M}_n\geqslant a\}=\sum_{j=0}^n\mathbf{P}\{T=j\},$$

以及

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant a\} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}\{T = j, M_n \geqslant a\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}\{T = j\}\mathbf{P}\{M_n \geqslant a \mid T = j\}.$$

然而，由 X_1，X_2，…的独立性以及分布的对称性知

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant a \mid T = j\} \geqslant \mathbf{P}\{M_n - M_j \geqslant 0 \mid T = j\}$$

$$= \mathbf{P}\{M_n - M_j \geqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

杜布极大不等式 设 M_0，M_1，M_2，…是关于$\mathcal{F}_n$ 的非负下鞅，则对任意的 $a>0$，

$$\mathbf{P}\{\overline{M}_n \geqslant a\} \leqslant \frac{\mathbf{E}[M_n]}{a}.$$

此不等式可以看成是如下不等式的一般化：

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant a\} \leqslant \frac{\mathbf{E}[M_n]}{a}.$$

要证杜布极大不等式，我们同样设 T 是满足 $M_j \geqslant a$ 的最小 j，且设 A_j 为关于$\mathcal{F}_j$ 可测的事件 $\{T=j\}$. 由 M_n 的非负性可以得到

$$\mathbf{E}[M_n] \geqslant \mathbf{E}[M_n I\{T \leqslant n\}] = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}[M_n I_{A_j}],$$

其中 I 为示性函数. 然而，由于 A_j 是$\mathcal{F}_j$ 可测的，根据条件期望的性质我们可以得到

$$\mathbf{E}[M_n I_{A_j}] = \mathbf{E}[E(M_n I_{A_j} \mid \mathcal{F}_j)] = \mathbf{E}[E(M_n \mid \mathcal{F}_j) I_{A_j}]$$

$$\geqslant \mathbf{E}[M_j I_{A_j}]$$

123

$$\geqslant \mathbf{E}[a I_{A_j}] = a\mathbf{P}(A_j).$$

从而

$$\mathbf{E}[M_n] \geqslant \sum_{j=0}^{n} a\mathbf{P}(A_j) = a\mathbf{P}\{\overline{M}_n \geqslant a\}.$$

若 M_0，M_1，…是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅，但不一定是非负的，则不能直接运用此不等式. 但是，如果 $r \geqslant 1$，且对所有的 n 有 $\mathbf{E}[|M_n|^r] < \infty$，则 $|M_n|^r$ 是下鞅. 证明这个结论只需利用下面的关于条件期望的性质：若 $r \geqslant 1$，则

$$E[|Y|^r \mid \mathcal{F}_n] \geqslant |E[Y \mid \mathcal{F}_n]|^r, \tag{5.16}$$

从而

$$E[|M_{n+1}|^r \mid \mathcal{F}_n] \geqslant |E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)|^r = |M_n|^r.$$

同理，若 $\mathbf{E}[e^Y] < \infty$，则

$$E[e^Y \mid \mathcal{F}] \geqslant e^{E(Y \mid \mathcal{F})}, \tag{5.17}$$

故对任意的 b，假设 $\mathbf{E}[e^{bM_n}] < \infty$，则

$$E[e^{bM_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] \geqslant e^{E(bM_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)} = e^{bM_n}.$$

即表明 e^{bM_n} 是下鞅. 我们将（5.16）和（5.17）的推导留作习题 5.3，但是在此先给出结论.

杜布极大不等式 设 M_0，M_1，M_2，…是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅，则对任意的 a，$b>0$ 以及 $r \geqslant 1$ 有

$$\mathbf{P}\{|\overline{M}_n| \geqslant a\} \leqslant \frac{\mathbf{E}[|M_n|^r]}{a^r},$$

$$\mathbf{P}\{\overline{M}_n \geqslant a\} \leqslant \frac{E[e^{bM_n}]}{e^{ba}}.$$

例 令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 表示 Z 上的简单随机游动，且令 $b=\frac{1}{\sqrt{n}}$. 由于 S_n 为鞅，因此可以得到

$$\mathbf{P}\{\max\{S_1,\cdots,S_n\} \geqslant a\sqrt{n}\} \leqslant e^{-a}\mathbf{E}[e^{S_n/\sqrt{n}}].$$

但是，

$$\mathbf{E}[e^{S_n/\sqrt{n}}] = \mathbf{E}[e^{(X_1+\cdots+X_n)/\sqrt{n}}]$$
$$= (\mathbf{E}[e^{X_1/\sqrt{n}}])^n = \left(\frac{e^{1/\sqrt{n}} + e^{-1/\sqrt{n}}}{2}\right)^n.$$

124

利用泰勒（Taylor）级数展开得

$$\frac{e^{1/\sqrt{n}} + e^{-1/\sqrt{n}}}{2} = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[e^{S_n/\sqrt{n}}] = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^n = e^{\frac{1}{2}}.$$

所以，存在一个 $C<\infty$，使得对所有 $a>0$ 以及任意充分大的 n 有

$$\mathbf{P}\{\max\{S_1,\cdots,S_n\} \geqslant a\sqrt{n}\} \leqslant Ce^{-a}. \tag{5.18}$$

5.7 习题

5.1 考虑投掷两个骰子的实验. 设 X 为第一次投掷得到的值，Y 为掷两骰子得到的总和. 求 $E(X|Y)$，即对所有的 y 给出 $E(X|Y)(y)$ 的值.

5.2 设 X_t 为服从参数 $\lambda=1$ 的泊松过程，求 $E(X_1|X_2)$ 以及 $E(X_2|X_1)$.

5.3 函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是凸（convex）函数，若对任意的 $0\leqslant p\leqslant 1$ 和 $x<y$ 有

$$f(px+(1-p)y) \leqslant pf(x)+(1-p)f(y).$$

(a) 证明：若对所有的 x 有 $f''(x)\geqslant 0$，则 f 是凸函数.

(b) 证明：若 $r\geqslant 1$，则 $f(x)=|x|^r$ 是凸函数.

(c) 证明：若 b 是一个实数，则 $f(x)=e^{bx}$ 是凸函数.

(d) 证明：若 f 是凸函数；假设 p_1，…，p_n 是和为 1 的非负数；且 x_1，…，x_n 是实数，则

$$f\left(\sum_{j=1}^n p_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n p_j f(x_j).$$

(e) 建立詹森（Jensen）不等式：对任意随机变量 X，假设期望存在，则

$$\mathbf{E}[f(X)] \geqslant f(\mathbf{E}[X]).$$

(f) 证明：如果 Y 是一个离散随机变量且 X 如（e）中所设，则 $\mathbf{E}(f(X)|Y)\geqslant f(E(X)|Y)$.

125

（注意：对于不是离散型变量的 Y，也可以通过极限过程得到此结论.）

5.4 设 X_1，X_2，X_3，…为独立同分布的随机变量，令 $m(t)=\mathbf{E}(e^{tX_1})$ 是 X_1（因此也是 X_i）的矩母函数. 固定 t 并且假设 $m(t)<\infty$，令 $S_0=0$ 且对 $n>0$，

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

设 $M_n=m(t)^{-n}e^{tS_n}$，证明 M_n 是关于 X_1，X_2，…的鞅.

5.5 设 X_0，X_1，…是如 2.4 节中的分支过程的值，即 X_n 给出了第 n 代的个体数. 假设每个个体产生后代数的均值为 μ. 证明 $M_n=\mu^{-n}X_n$ 是关于 X_0，X_1，…的鞅.

5.6 计算机模拟

(a) 考虑 Polya 坛子模型. 利用计算机模拟此模型：一开始坛中只有一个红球和一个绿球，持续摸球直到坛中球的个数为 1 000. 留意在这 1 000 个球中红球所占的比例. 重复模拟至少 2 000 次并且注意红球占的比例出现在区间 $[0, 0.05)$，$[0.05, 0.1)$，…，$[0.95, 1)$ 中共多少次. 从模拟的数据推测红球所占比例的分布大概是什么样的.

(b) 对 Polya 坛子模型进行另一个模拟. 同样，一开始坛中只有一个红球和一个绿球，持续摸球直到坛中球的个数为 1 000. 这次注意红球的比例再持续摸球直到坛中球的数为 2 000. 比较这两个值（即比较 M_{998} 和 M_{1998}）. 重复这一过程至少 100 次.

5.7 考虑整数集上的一个有偏的随机游动，其向右移的概率为 $p<\frac{1}{2}$，向左移的概率为 $1-p$. 令 S_n 为游动在时刻 n 的值，假设 $S_0=a$，其中 $0<a<N$.

(a) 证明 $M_n=\left[\frac{(1-p)}{p}\right]^{S_n}$ 是鞅.

(b) 设 T 为随机游动首次到达 0 或 N 的时刻，即

$$T = \min\{n: S_n = 0 \text{ 或 } N\}.$$

对 M_n 利用可选抽样定理计算 $\mathbf{P}\{S(T)=0\}$.

5.8 设 S_n 如习题 5.7 所设.

(a) 证明 $M_n=S_n+(1-2p)n$ 是鞅.

(b) 设 T 为随机游动首次到达 0 或 N 的时刻，即

$$T = \min\{n: S_n = 0 \text{ 或 } N\}.$$

令 $T_n=\min\{n, T\}$ 且设 Z_n 是鞅 $Z_n=M_{T_n}$. 证明存在一个 $C<\infty$ 使得 $\mathbf{E}(Z_n^2)<C$ 对所有 n 成立. 或许你可以利用习题 1.7.

126

(c) 对 $\mathbf{E}(M_T)$ 应用可选抽样定理，并利用得到的结论以及习题 5.7 的结果求直到吸收所需步数的期望值 $\mathbf{E}(T)$.

5.9 设 X_n 是有限状态空间 S 上的不可约马尔可夫链，其转移矩阵为 $\mathbf{P}$. 设 A 是 S 的一个子集且 F：$A\to\mathbf{R}$ 和 g：$S\setminus A\to\mathbf{R}$ 是给定的函数. 令 $T=\min\{n: X_n\in A\}$，$T_n=\min\{n, T\}$，假设函数 f：$S\to\mathbf{R}$ 满足：

$$f(x) = F(x), \quad x \in A$$
$$\mathbf{P}f(x) = g(x), \quad x \in S\setminus A.$$

(a) 证明：

$$M_n = f(X_{T_n}) - \sum_{j=0}^{T_n - 1} g(X_{T_j})$$

是鞅.

(b) 利用可选抽样定理推导

$$f(x) = \mathbf{E}\left[F(X_T) - \sum_{j=0}^{T-1} g(X_j) \mid X_0 = x\right].$$

[提示：习题 1.7 或许有用.]

5.10 设 S_n 如习题 5.7 所设，且记$\mathcal{F}_n$ 为 S_0，…，S_n 中的信息. 令

$$M_n = \frac{1}{[4p(1-p)]^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{S_n}{2}}.$$

(a) 证明 M_n 是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅.

(b) 证明 M_nS_n 是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅.

(c) 假设过程 R_n 满足 $R_0=M_0$，且 R_n 及 R_nS_n 都是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅，证明 $R_n=M_n$ 对所有 n 成立.

5.11 设 X_n 是分支过程中第 n 代的个体数，且每个个体所产生后代数的分布具有均值 μ 和方差 σ^2. 在前面我们已经证明了 $M_n=\mu^{-n}X_n$ 是鞅.

(a) 令$\mathcal{F}_n$ 表示包含在 X_0，…，X_n 中的信息，证明

$$E(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) = \mu^2 X_n^2 + \sigma^2 X_n.$$

127

(b) 设 $\mu>1$，证明存在一个 $C<\infty$使得对所有的 n 有

$$\mathbf{E}(M_n^2) < C.$$

(c) 证明上述结论对 $\mu\leqslant 1$ 不成立.

5.12 考虑 Polya 坛子问题. 令 M_n 为 n 次摸球后红球所占的比例（开始只有一个红球和一个绿球）. 对 n 利用归纳法证明

$$\mathbf{P}\left\{M_n = \frac{k}{n+2}\right\} = \frac{1}{n+1}, \quad k = 1,2,\cdots,n+1.$$

5.13 设 X_1，X_2，…是一致可积的，且以概率 1 有 $X_n\to Y$，证明 $\mathbf{E}(X_n)\to\mathbf{E}(Y)$.

5.14 设 X_1，X_2，…是独立同分布的随机变量，且它们在 {−1，0，1，…} 上取值，均值 $\mu<0$. 令 $S_0=1$，对 $n>0$ 有

$$S_n = 1 + X_1 + \cdots + X_n.$$

令 $T=\min\{n: S_n=0\}$，由大数定律知，$\mathbf{P}\{T<\infty\}=1$. 证明 $\mathbf{E}(T)\leqslant\frac{1}{|\mu|}$. [提示：只需证明对任意的 n，若 $T_n=\min\{n, T\}$，则 $\mathbf{E}(T_n)\leqslant\frac{1}{|\mu|}$. 考虑鞅 $M_n=S_n-n\mu$.] 可以利用下面的习题 5.16 来证明 $\mathbf{E}(T)=\frac{1}{|\mu|}$.

5.15 设 M_n 是关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅，假定存在一个非负的随机变量 Y，使得 $\mathbf{E}(Y)<\infty$且 $|M_n|\leqslant Y$ 对所有 n 都成立，证明 M_n 是一致可积鞅.

5.16 设 X_1，X_2，…是均值为 μ 的独立同分布的随机变量，T 是关于 X_1，X_2，…的停时，

且 $\mathbf{E}(T)<\infty$.

(a) 令

$$Y=\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|I\{T\geqslant n\},$$

其中 I 为示性函数，证明 $\mathbf{E}(Y)<\infty$.

(b) 令 $T_n=\min\{n,\ T\}$ 且

$$M_n=X_1+\cdots+X_{T_n}-\mu T_n.$$

128

解释 M_n 为什么是一致可积鞅（见习题 5.15）.

(c) 证明瓦尔德（Wald）等式：

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{T}X_n\Big)=\mu\mathbf{E}(T). \tag{5.19}$$

(d) 设 $\{\mathcal{F}_n\}$ 是一 σ 域流，其中 X_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的且对 $m>n$，X_m 与 $\mathcal{F}_n$ 相互独立（即 X_m 与所有 $\mathcal{F}_n$ 可测的随机变量都相互独立）. 设 T 是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的停时（换言之，需要知道比 X_1，…，X_n 多的信息才能决定在时刻 n 是否停止. 然而，利用到的额外信息却是与 X_{n+1}，X_{n+2}，…相互独立的）. 证明上述 (a)～(c) 仍然成立.

5.17 设 S_n 为 $\mathbf{Z}$ 上的简单随机游动.

(a) 证明：对任意 $\beta>0$，存在一个 $C_\beta<\infty$，使得对所有正整数 n 以及所有 $a>0$ 有

$$\mathbf{P}\{\max\{S_1,\cdots,S_n\}\geqslant a\sqrt{n}\}\leqslant C_\beta e^{-a\beta}.$$

[提示：将 $b=\dfrac{\beta}{\sqrt{n}}$代入 (5.18) 的推导过程.]

(b) 证明：对任意 $c>0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{S_n\geqslant c\sqrt{n}\log n\}<\infty.$$

(c) 利用上述结论证明以概率 1 有

129

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}(\log n)}=0.$$

第6章 更新过程

6.1 引言

设 T_1，T_2，…是独立同分布的非负随机变量，分布函数为 $F(x)=\mathbf{P}\{T_i\leqslant x\}$. 我们可以将随机变量 T_i 看做是一个零件的寿命或者是某事件相继发生的时间间隔. 称与 T_i 相联系的更新过程（renewal process）为 t 时刻之前事件发生的总次数的计数过程. 更精确地，更新过程 N_t 定义如下：当 $t<T_1$ 时，$N_t=0$；其他情况下，

$$N_t = \max\{n: T_1 + \cdots + T_n \leqslant t\}.$$

假定在时刻 0 时，我们处在一个生命期的起始时刻. 有时我们考虑一个更为普遍的过程：在时刻 0 时，此过程处在一个生命期的中间时刻. 设 Y 是一个独立于 T_1，T_2，…的非负随机变量，可能服从与 T_i 不同的分布. 我们将 Y 看做是直到第一个事件发生的时刻，且之后事件的等待时间由 T_i 给定. 更精确地，设 $t<Y$ 时，$N_t=0$；当 $t\geqslant Y$ 时，

$$N_t = \min\{n: Y + T_1 + \cdots + T_n > t\}. \tag{6.1}$$

我们假定随机变量 T_i 具有有限的正均值，并设

$$\mu=\mathbf{E}(T_i).$$

例 1 泊松过程

考虑速率参数为 λ 的泊松过程. 等待时间 T_1，T_2，…相互独立，且服从参数为 λ 的指数分布，N_t 为泊松过程. 在此情况下，$\mu=\dfrac{1}{\lambda}$.

例 2 设 X_n 是一个起始于状态 x 的不可约、正常返的离散时间马尔可夫链. 令

$$T_1 = \min\{n > 0: X_n = x\},$$

131

且当 $i>1$ 时，令

$$T_i = \min\{n > 0: X_{T_1+\cdots+T_{i-1}+n} = x\}.$$

也就是说，T_i 是第 $i-1$ 次与第 i 次返回到状态 x 的时间间隔. 一般地，在给定该链的转移矩阵时，很难求出 T_i 的分布函数 F. 我们之前已看到［见（1.11）］

$$\mathbf{E}(T_i) = \frac{1}{\pi(x)},$$

其中 π 为该链的不变概率测度. 如果把该链的初始状态改为 $y\neq x$，我们可以定义

$$Y = \min\{n > 0: X_n = x\},$$
$$T_1 = \min\{n > 0: X_{Y+n} = x\},$$

递归地，

$$T_i=\min\ \{n>0:\ X_{Y+T_1+\cdots+T_{i-1}+n}=x\}.$$

例 3 设 X_t 是一个起始于状态 x 的不可约、正常返的连续时间马尔可夫链. 定义

$$R_1 = \inf\{t > 0: X_t \neq x\},$$
$$S_1 = \inf\{t > R_1: X_t = x\},$$

$$T_1 = R_1 + S_1,$$

且一般地，

$$R_i = \inf\{t > 0 : X_{T_1+\cdots+T_{i-1}+t} \neq x\},$$
$$S_i = \inf\{t > 0 : X_{T_1+\cdots+T_{i-1}+R_i+t} = x\},$$
$$T_i = R_i + S_i.$$

随机变量 R_i 服从参数为 $\alpha(x)$ 的指数分布，$\alpha(x)$ 是指该链从状态 x 转移到其他状态的速率. 132 S_i 的分布不易求出，因此 T_i 的分布也不易求出.

例4 ***M/G/1* 排队系统.** 假设我们有只有一个服务员的排队系统. 顾客的到达数服从参数为 λ 的泊松过程，即顾客到达之间的时间间隔相互独立，且服从参数为 λ 的指数分布. 假设顾客的服务时间是独立同分布的随机变量且均值为 μ. 然而，我们将不假定服务时间为指数型的（在大多数有趣的情况下，我们并不希望服务时间具有“无记忆性”，因此指数分布是不合适的）. $M/G/1$ 中的 G 代表“一般的”（服务分布）.

如果用 Y_t 表示时刻 t 时排队系统中的顾客数，那么 Y_t 不是一个马尔可夫过程. 然而有一个很自然地与排队系统相关联的更新过程. 假设 $Y_0=0$. 设

$$R_1 = \inf\{t > 0 : Y_t = 1\},$$
$$S_1 = \inf\{t > 0 : Y_{R_1+t} = 0\},$$
$$T_1 = R_1 + S_1.$$

类似地，当 $i>1$ 时，我们定义

$$R_i = \inf\{t > 0 : Y_{T_1+\cdots+T_{i-1}+t} = 1\},$$
$$S_i = \inf\{t > 0 : Y_{T_1+\cdots+T_{i-1}+R_i+t} = 0\},$$
$$T_i = R_i + S_i.$$

注意到变量 R_i 服从速率为 λ 的指数分布，但 S_i 的分布很复杂. 然而，在 $\mathbf{E}(T_i)<\infty$ 的假定下，我们可看出 T_1，T_2，…满足更新过程的条件. 可将 R_i 描述的时间看做“闲期”，S_i 描述的时间看做“忙期”.

假设我们有一个对应于随机变量 T_1，T_2，…的更新过程 N_t. 一般地，N_t 不是一个马尔可夫过程；为了预测下一事件的发生时刻，我们需要知道最后一次事件发生的时刻. 因此，很自然地考虑“年龄过程”

$$A_t = \begin{cases} t, & N_t = 0, \\ t - [T_1 + \cdots + T_{N_t}], & N_t > 0. \end{cases}$$

133 过程（N_t，A_t）可看做一个马尔可夫过程. 泊松过程是更新过程的一个特例，同时也是一个马尔可夫过程. 因为对于泊松过程，在 $[t, t+\Delta t]$ 区间内，一个事件发生的概率与 A_t 是相互独立的. 这是根据指数分布的“无记忆性”得出的.

更新过程的第一个结论类似于（强）大数定律. 回想一下，大数定律表述为：以概率1，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n} = \mu.$$

就更新过程 N_t 而言，可表述为：对所有的 $\epsilon>0$，如果 n 充分大，那么

$$N_{\mu n(1-\epsilon)} \leqslant n,$$
$$N_{\mu n(1+\epsilon)} \geqslant n.$$

等价地，对所有的 $\epsilon>0$，如果 t 充分大，那么

$$N_t \leqslant \frac{t}{\mu(1-\epsilon)},$$

$$N_t \geqslant \frac{t}{\mu(1+\epsilon)}.$$

定理如下.

大数定律 以概率 1，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\frac{1}{\mu}. \tag{6.2}$$

我们现在推导更新过程的中心极限定理. 假设每个 T_i 的方差为 $\sigma^2<\infty$. 通常的中心极限定理表述为

$$\frac{T_1+\cdots+T_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

的分布近似为标准正态分布（即一个均值为 0，方差为 1 的正态随机变量）. 说得更一般化些就是，对充分大的 n，

$$T_1+\cdots+T_n\approx n\mu+\sigma\sqrt{n}B,$$

其中 B 服从标准正态分布. 由此可知，在时间 $n\mu+\sigma\sqrt{n}B$ 内，事件发生的次数为 n. 由 (6.2)，[134] 我们可以期望在大小为 $\sigma\sqrt{n}|B|$ 的时间间隔内，事件发生的次数大约为 $\frac{\sigma\sqrt{n}|B|}{\mu}$. 因此，在时间 $n\mu$ 内，事件发生的次数大约为

$$n-\frac{\sigma}{\mu}\sqrt{n}B.$$

如果记 $n\mu$ 为 t，注意到 $-B$ 也是一个服从标准正态分布的随机变量，我们可以看到

$$N_t\approx\frac{t}{\mu}+\frac{\sigma}{\mu^{\frac{3}{2}}}\sqrt{t}B,$$

其中 B 服从标准正态分布. 尽管这只是一个简要推导，但此结论在给出了更新过程的中心极限定理的条件下，可以被严格证明.

中心极限定理 如果等待时间 T_i 的均值为 μ，方差为 σ^2，那么当 $t\to\infty$ 时，

$$\frac{N_t-\mu^{-1}t}{\sigma\mu^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}$$

近似地服从标准正态分布.

例 5 这种非正式的推理方式可应用到更复杂的例子中. 假设有一个连续时间马尔可夫链 X_t，其状态空间为 {1, 2}，且 $\alpha(1, 2)=\alpha_1$，$\alpha(2, 1)=\alpha_2$. 假设 $X_0=1$，令 Y_t 表示直到时刻 t 停留在状态 1 的总时间，

$$Y_t = \int_0^t I\{X_s = 1\} \mathrm{d}s.$$

R_i 和 S_i 的定义同上述例 3(且 $x=1$). 随机变量 R_i 服从速率为 α_1 的指数分布，因此均值为 $\mu_1 = \frac{1}{\alpha_1}$，方差为 $\sigma_1^2 = \frac{1}{\alpha_1^2}$. 类似地，随机变量 S_i 服从指数分布，且均值为 $\mu_2 = \frac{1}{\alpha_2}$，方差为 $\sigma_2^2 = \frac{1}{\alpha_2^2}$. 当 n 很大时，中心极限定理表述为

$$R_1 + \cdots + R_n \approx n\mu_1 + \sigma_1 \sqrt{n} B_1,$$
$$S_1 + \cdots + S_n \approx n\mu_2 + \sigma_2 \sqrt{n} B_2,$$

其中 B_1，B_2 相互独立，且服从标准正态分布. 换言之，在时间 $n(\mu_1+\mu_2)+\sqrt{n}(\sigma_1 B_1+\sigma_2 B_2)$ 内，停留在状态 1 的总时间近似为 $n\mu_1+\sqrt{n}\sigma_1 B_1$. 当 t 很大时，在时间区间 $[t, t+\Delta t]$ 内，停留在状态 1 的总时间大约为 $\Delta t\left[\frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)}\right]$. 因此在时间 $(\mu_1+\mu_2)n$ 内，停留在状态 1 的总时间近似为

135

$$n\mu_1 + \sqrt{n}\sigma_1 B_1 - \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sqrt{n}(\sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2) = n\mu_1 + \frac{\sqrt{n}}{\mu_1+\mu_2}[\mu_2\sigma_1 B_1 - \mu_1\sigma_2 B_2].$$

因为 B_1，B_2 是相互独立的，我们可以把上式改写为

$$n\mu_1 + \sqrt{n}\sqrt{\left(\frac{\sigma_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^2} B = \frac{1}{\alpha_1}n + \sqrt{2n}\,\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}B,$$

其中 B 服从标准正态分布. 如果令 $t=(\mu_1+\mu_2)n$，我们可以知道

$$\frac{Y_t - \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}t}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}$$

渐近服从标准正态分布，其中

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}.$$

6.2 更新方程

我们对更新过程的极限行为很感兴趣. 假设已有一个如前一节所定义的等待时间为 T_1，T_2，…且均值为 μ 的更新过程. 对于 $T \geqslant 0$，令 $U(t)$ 为直到时刻 t 事件发生总数的期望值. 简便起见，我们称在时刻 0，有一个事件发生. 也就是说，

$$U(t) = \mathbf{E}(N_t + 1).$$

更新定理 I

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{6.3}$$

这可以看做 (6.2) 的一个推论；然而，我们需要仔细一些，因为有可能出现随机变量收敛而其期望不收敛的情况. 我们将把从 (6.2) 得到 (6.3) 的推导过程留作习题 (习题 6.5).

为了分析更新过程的极限行为，我们需要更新定理一个更强的形式. 第二更新定理可看做 (6.3) 的一个推导形式，或者更新过程收敛到一个稳定状态的表述. 第二更新定理表述为：对

每一个 $r>0$，在恰当的假设下，有

$$\lim_{t\to\infty} U(t+r)-U(t)=\frac{r}{\mu}, \tag{6.4}$$

136

即当 t 很大时，在任意长度为 r 的时间间隔内，更新次数的期望值大约为$\frac{r}{\mu}$. 不难发现，要使 (6.4) 成立，需对分布作一些限制. 例如，如果等待时间 T_i 仅在整数上取值，那么对任意整数 n，由于更新仅在整数时刻发生，因此有

$$U(n)=u\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

可以证明这种情况也确实是 (6.4) 不成立的唯一情况. 我们称一个非负随机变量服从格点分布，如果存在数 a，使得 X 以概率 1 取值于

$$\{ak : k=0,1,2\cdots\},$$

我们称满足条件的最小的 a 为分布的周期 (period). 否则，称 X 不服从格点分布. 现给出第二更新定理.

更新定理Ⅱ 如果 T_1，T_2，…不服从格点分布，那么对每一个 $r>0$，

$$\lim_{t\to\infty} U(t+r)-U(t)=\frac{r}{\mu}.$$

如果 T_1，T_2，…服从格点分布，且周期为 a，那么

$$\lim_{n\to\infty} U((n+1)a)-U(na)=\frac{a}{\mu}.$$

我们将不给出此定理在不服从格点分布情况下的证明，但是将重点阐述如何运用这一结论. 在下一节中，我们将把此定理的格点形式与马尔可夫链正常返的结论联系起来. 设 F 为 T_i 的分布. 回想一下，两个非负随机变量的分布 F，G，它们的卷积定义为

$$F*G(t)=\int_0^t F(t-s)\mathrm{d}G(s)=\int_0^t G(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

卷积 $F*G$ 给出了分布函数分别为 F 和 G 的两个独立随机变量之和的分布函数. 设 F 为 T_i 的分布函数. 我们记 $F^{(n)}$ 为 F 的 n 重卷积，即 $T_1+\cdots+T_n$ 的分布函数. 为简便起见，设 $F^{(0)}$ 为随机变量恒为 0 时的平凡分布函数. 回想一下 [见 (1.13)]，如果 Y 是一个取值为非负整数的随机变量，那么

$$\mathbf{E}(Y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{Y\geqslant n\}.$$

137

利用此公式，我们可以把更新函数 $U(t)$ 写为

$$\begin{aligned}U(t)=\mathbf{E}(N_t+1)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{N_t\geqslant n\}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{T_1+\cdots+T_n\leqslant t\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}F^{(n)}(t).\end{aligned}$$

设 A_t 表示最后一次更新到现在经过的时间，

$$A_t = \begin{cases} t, & N_t = 0, \\ t-(T_1+\cdots+T_n), & N_t = n. \end{cases}$$

如果考虑 T_i 为某零件的寿命，那么 A_t 代表当前零件的寿命．我们希望能求出 A_t 的平稳分布，即对每一个 x，希望求解

$$\Psi_A(x) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{A_t \leqslant x\}.$$

对第一次更新的时刻取条件．使得 A_t 少于 x 的一种方式是直到时刻 t 没有事件发生且 $t\leqslant x$．它对应于 $t<T_1$ 且如果 $t\leqslant x$，则概率为 $1-F(t)$．如果第一次更新在时刻 t 之前发生，比如设在时刻 s 发生，那么更新过程重新开始，直到时刻 t 还剩余的时间为 $t-s$．因此可得到方程

$$\mathbf{P}\{A_t \leqslant x\} = 1_{[0,x]}(t)[1-F(t)] + \int_0^t \mathbf{P}\{A_{t-s} \leqslant x\}\mathrm{d}F(s). \tag{6.5}$$

这里 $1_{[0,x]}(t)$ 表示当 $0\leqslant t\leqslant x$ 时，值等于 1，其他情况值等于 0 的函数．如果我们令 $\phi(t)=\phi(t, x)=\mathbf{P}\{A_t\leqslant x\}$，那么上式变为

$$\phi(t) = 1_{[0,x]}(t)[1-F(t)] + \int_0^t \phi(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

这是**更新方程**（renewal equation）的一个例子．我们将考虑形式为

$$\phi(t) = h(t) + \int_0^t \phi(t-s)\mathrm{d}F(s) \tag{6.6}$$

或卷积形式

$$\phi(t) = h(t) + \phi * F(t)$$

138 的更新方程的解．我们需要结合卷积的性质：如果 F 和 G 为分布函数，则

$$(\phi * F) * G(t) = \phi * (F * G)(t). \tag{6.7}$$

让我们在 F 和 G 均有密度的情形下推导上式，则 $\mathrm{d}F(t)=f(t)\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}G(t)=g(t)\mathrm{d}t$．在此情形下，有

$$\begin{aligned}(\phi * F) * G(t) &= \int_0^t (\phi * F)(t-s)g(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left[\int_0^{t-s} \phi(t-s-r)f(r)\mathrm{d}r\right]g(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left[\int_s^t \phi(t-y)f(y-s)\mathrm{d}y\right]g(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \phi(t-y)\left[\int_0^y f(y-s)g(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_0^t \phi(t-y)(f*g)(y)\mathrm{d}y \\ &= \phi * (F * G)(t).\end{aligned}$$

这里 $(f*g)(y)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)(F*G)(y)$ 表示密度分别为 f，g 的两个独立的随机变量之和的密度．

首先我们证明（6.6）在下述情形下仅有一个解：至多有一个 $\phi(t)$ 满足（6.6）且当 $t<0$

时，$\phi(t)=0$，并且使得对每一个 t 都存在一个数 $M=M_t<\infty$，对所有的 $0\leqslant s\leqslant t$ 有 $|\phi(s)|\leqslant M$. 假定对于给定的 h，存在满足条件的两个解 $\phi_1(t)$，$\phi_2(t)$. 则 $\psi(t)=\phi_1(t)-\phi_2(t)$ 满足 $|\psi(s)|\leqslant 2M$，$0\leqslant s\leqslant t$，且

$$\psi(t)=\int_0^t \psi(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

如果对（6.7）进行迭代，那么对每个 n，有

$$\psi(t)=\int_0^t \psi(t-s)\mathrm{d}F^{(n)}(s).$$

但是，

$$|\psi(t)|=\left|\int_0^t \psi(t-s)\mathrm{d}F^{(n)}(s)\right|\leqslant 2MF^{(n)}(t).$$

对固定的 t，当 $n\to\infty$时，$F^{(n)}(t)\to 0$. 即证明了 $\psi(t)=0$.

139

既然我们知道仅有一个解，那么仅需要构造一个解. 设

$$\phi(t)=\int_0^t h(t-s)\mathrm{d}U(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t h(t-s)\mathrm{d}F^{(n)}(s)$$
$$=h(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t h(t-s)\mathrm{d}F^{(n)}(s).$$

则可以看出利用（6.7），它满足（6.6）. 因此它给出了唯一的解.

我们现在假设 F 是一个非格点分布，另一种表述第二更新定理的方式为：当 s 很大时，

$$\mathrm{d}U(s)\approx\mu^{-1}\mathrm{d}s.$$

如果 $h(t)$ 是一个有界函数，且 $\int_0^{\infty}|h(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$，那么

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-s)\mathrm{d}U(s)=\lim_{t\to\infty}-\int_0^t h(s)\mathrm{d}U(t-s)=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}h(s)\mathrm{d}s. \tag{6.8}$$

由于年龄分布 A_t 满足（6.5），我们可以推断出年龄的极限分布函数 $\Psi_A(x)$ 为

$$\Psi_A(x)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{A_t\leqslant x\}=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}1_{[0,x]}(s)[1-F(s)]\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{\mu}\int_0^x[1-F(s)]\mathrm{d}s.$$

注意到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\Psi_A(x)&=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}[1-F(s)]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_s^{\infty}\mathrm{d}F(r)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\left[\int_0^r\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}F(r)\\&=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}r\mathrm{d}F(r)=1,\end{aligned}$$

所以它给出了一个有效的分布函数，其密度为

$$\psi_A(x)=\Psi_A'(x)=\frac{1}{\mu}[1-F(x)],\quad 0<x<\infty.$$

例 1 假设等待时间服从速率为 λ 的指数分布，那么 $F(t)=1-e^{-\lambda t}$，$\mu=\frac{1}{\lambda}$. 则

140

$$\Psi_A(x)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{A_t\leqslant x\}=\frac{1}{\mu}\int_0^x e^{-\lambda s}ds=1-e^{-\lambda x}.$$

因此对于一个速率为 λ 的泊松过程，其年龄的极限分布是一个速率为 λ 的指数分布. 这个结论看起来非常合理：对一个很大的时间 t，年龄 A_t 表示自上一次事件发生后，要再次看到一个事件发生，我们已经等待的总时间. 而与原泊松过程相应的时间倒逆的过程看起来也是一个泊松过程，所以从某时刻开始直到一个事件发生所需的时间将服从指数分布.

例 2 假设等待时间服从 [0，10] 上的均匀分布，使得当 $0\leqslant t\leqslant 10$ 时，$F(t)=\left(\frac{t}{10}\right)$ 且 $\mu=5$. 则年龄 A_t 总是少于 10，且当 $x<10$ 时，

$$\Psi_A(x)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{A_t\leqslant x\}=\frac{1}{\mu}\int_0^x\left[1-\frac{t}{10}\right]dt=\frac{x}{5}-\frac{x^2}{100}. \tag{6.9}$$

可以看到在此情形下（除了指数型等待时间外的其他所有基本情形），年龄的极限分布与等待时间的分布并不一致.

现在我们考虑另外两个过程，*剩余寿命*（residual life）

$$B_t=\inf\{s : N_{t+s}>N_t\}$$

和*全寿命*（total life）

$$C_t=A_t+B_t.$$

剩余寿命给出了直到当前零件在系统中损坏的时间. 考虑 $\mathbf{P}\{B_t\leqslant x\}$. 有两种方式使得 B_t 小于 x. 一种是直到时刻 t 都没有出现更新，且 $B_t\leqslant x$. 它对应于 $t<T_1\leqslant t+x$，其概率为 $F(t+x)-F(t)$. 另一种可能就是第一次更新在时刻 $s<t$，此情形下我们需要考虑 $\{B_{t-s}\leqslant x\}$. 可得到更新方程

$$\mathbf{P}\{B_t\leqslant x\}=[F(t+x)-F(t)]+\int_0^t\mathbf{P}\{B_{t-s}\leqslant x\}dF(s).$$

此更新方程的解为

$$\mathbf{P}\{B_t\leqslant x\}=\int_0^t[F(t-s+x)-F(t-s)]dU(s).$$

141

由（6.8），我们可求出剩余寿命的极限分布函数 $\Psi_B(x)$：

$$\begin{aligned}\Psi_B(x)&=\lim_{t\to\infty}\int_0^t[F(t-s+x)-F(t-s)]dU(s)\\&=\lim_{t\to\infty}-\int_0^t[F(s+x)-F(s)]dU(t-s)\\&=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty[F(s+x)-F(s)]ds\\&=\frac{1}{\mu}\left[\int_0^\infty[1-F(s)]ds-\int_0^\infty[1-F(s+x)]ds\right]\\&=\frac{1}{\mu}\left[\int_0^\infty[1-F(s)]ds-\int_x^\infty[1-F(r)]dr\right]\\&=\frac{1}{\mu}\int_0^x[1-F(s)]ds.\end{aligned}$$

可以看出剩余寿命的极限分布函数和年龄的分布函数是一样的. 如果我们仔细考虑，它是有道理的. 考虑每个寿命 T_i. 对于每个 r，s，有 $r+s=T_i$，它对应于一个时刻 t 满足 $A_t=r$，$B_t=s$ 而另一个时刻 u 满足 $A_u=s$，$B_u=r$. 由对称性，我们可预想 A_t，B_t 具有相同的极限分布.

现在考虑全寿命 C_t 和 $\mathbf{P}\{C_t\leqslant x\}$. 使得 C_t 少于 x 的一种方式是直到时刻 t 都没有更新出现，且全寿命小于 x. 它对应于 $t<T_1\leqslant x$ 且它的概率为 $F(x)-F(t)$. 另一种可能就是第一个事件发生在时刻 $s<t$，此情形下我们需要考虑 $\mathbf{P}\{C_{t-s}\leqslant x\}$. 可得到更新方程

$$\mathbf{P}\{C_t \leqslant x\} = 1_{[0,x]}(t)[F(x)-F(t)] + \int_0^t \mathbf{P}\{C_{t-s} \leqslant x\}\mathrm{d}F(s).$$

求解此更新方程并利用 (6.8)，我们可得全寿命的极限分布 $\Psi_C(x)$. 为

$$\begin{aligned}\Psi_C(x) &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t 1_{[0,x]}(t-s)[F(x)-F(t-s)]\mathrm{d}U(s)\\ &= \lim_{t\to\infty} -\int_0^t 1_{[0,x]}(s)[F(x)-F(s)]\mathrm{d}U(t-s)\\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty 1_{[0,x]}(s)[F(x)-F(s)]\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^x [F(x)-F(s)]\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{\mu}\left[xF(x)-\int_0^x F(s)\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

这个公式在 F 处有密度 $f(t)$ 时很好理解. 在此情形下，$\Psi_C(x)$ 的密度为 142

$$\psi_C(x) = \Psi'_C(x) = \frac{1}{\mu}xf(x). \tag{6.10}$$

可以从直观上理解此式. 假设 $x<y$，则长度为 x 和 y 的等待时间的相对"概率"为$\frac{f(x)}{f(y)}$. 然而，长度为 y 的等待时间消耗了 y 个单位时间而长度为 x 的等待时间消耗了 x 个单位时间. 因此长度为 x 的时间间隔在长度为 y 的时间间隔中的比例应当为$\frac{xf(x)}{yf(y)}$. 容易看出$\frac{1}{\mu}$是使得它为概率密度的一个适当的正规化因子.

例 3 如果等待时间服从速率为 λ 的指数分布，那么 $\mu=\frac{1}{\lambda}$，且 Ψ_A 和 Ψ_B 都服从速率为 λ 的指数分布. 注意到 Ψ_C 的密度为

$$\psi_C(x) = \lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

它是参数为 2 和 λ 的 Gamma 分布的密度，也是两个独立的速率为 λ 的指数型随机变量之和的密度函数. 对于充分大的时间，年龄和剩余寿命为相互独立的随机变量.

例 4 如果 F 是 $[0, 10]$ 上的均匀分布，那么 $\mu=5$，Ψ_A 和 Ψ_B 由 (6.9) 可得，且密度为

$$\psi_A(x) = \psi_B(x) = \frac{1}{5} - \frac{x}{50},\quad 0 < x < 10.$$

注意到年龄或剩余寿命的期望从长远来看为

$$\int_0^{10} x\left[\frac{1}{5}-\frac{x}{50}\right]\mathrm{d}x=\frac{10}{3}.$$

Ψ_C 的密度为

$$\psi_C(x)=\frac{1}{\mu}xf(x)=\frac{x}{50},\quad 0<x<10.$$

容易检验年龄和寿命函数在此情形下不是渐近独立的，例如，存在一个正的概率使得年龄超过 8，也存在一个正的概率使得剩余寿命大于 8，但是不可能使得它们同时超过 8，因为全寿命被 10 所限制.

假设当零件损坏后更新零件，且它们的寿命是相互独立的，服从分布 F. 假设系统在某个很大的 t 时，我们要求出当前零件能够持续多久的期望值. 这也是等价地求解剩余寿命的期望值. 它由

143

$$\int_0^\infty x\psi_B(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty x[1-F(x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mu}\int_0^\infty x^2\mathrm{d}F(x)$$

给出. 最后一个等式可由分部积分得出. 容易给出具有密度为 $f(x)$ 的分布且满足

$$\mu<\frac{1}{2\mu}\int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x$$

的例子（见习题 6.6）. 事实上，有可能出现 $\mu<\infty$ 而剩余寿命的期望值为无穷大的情形. 开始可能会觉得奇怪，然而，稍微思考一下，便会发现也不是毫无道理的.

我们在本节的最后描述怎样构造一个“平稳更新过程”. 假设 T_1，T_2，…相互独立，且服从非格点分布 F. 令 Ψ_B 为剩余寿命的极限分布，令 Y 为独立于 T_1，T_2，…的随机变量，且它的分布函数为 Ψ_B. 定义 N_t 如（6.1）所示. 则 N_t 看起来为一个状态稳定的更新过程. 它具有这样的性质：对每个 $s<t$，N_t-N_s 具有与 N_{t-s} 相同的分布.

6.3 离散更新过程

在本节我们假定随机变量 T_1，T_2，…为格点随机变量. 不失一般性，假定如 6.2 节中定义的周期 a 等于 1(通过选择适当的时间单位，总可以使得周期等于 1). 设 F 为 T_i 的分布函数且令

$$p_n=\mathbf{P}\{T_i=n\}=F(n)-F(n-1).$$

为简便起见，假设 $p_0=0$；如果 $p_0>0$，我们可对本节中的方法作些适当调整（见习题 6.10). 因为周期为 1，故集合

$$\{n: p_n>0\}$$

的最大公因子为 1. 和前面一样，设

$$\mu=\mathbf{E}(T_i)=\sum_{n=1}^\infty np_n,$$

并假定 $\mu<\infty$.

令 N_j 表示直到时刻 j（包含时刻 j）已经发生的事件数，即当 $j<T_1$ 时 $N_j=0$，否则

$$N_j=\max\{n: T_1+\cdots+T_n\leqslant j\}.$$

我们同样可定义年龄过程 A_j：当 $j<T_1$ 时 $A_j=j$，否则

144

$$A_j=j-(T_1+\cdots+T_{N_j}).$$

最关键的事实是 A_j 为一个马尔可夫链. 令

$$\lambda_n = \mathbf{P}\{T_i = n \mid T_i > n-1\} = \frac{p_n}{1-F(n-1)}.$$

那么 A_j 是一个离散时间马尔可夫链且转移概率为

$$p(n,0) = \lambda_{n+1}, \quad p(n,n+1) = 1-\lambda_{n+1}.$$

令 K 为满足 $p_k>0$ 的最大值 k(其中 $K=\infty$意味着有无穷多个 k 使得 $p_k>0$). 则当 $K<\infty$时, A_j 是状态空间为 $\{0,1,\cdots,K-1\}$ 的一个不可约马尔可夫链; 当 $K=\infty$时, 状态空间为 $\{0,1,\cdots\}$. 由于我们假定 F 的周期为 1, 故这个链同样是非周期的. 我们以 $A_0=0$ 为开始状态, 注意到第 n 次返回到状态 0 发生在时刻 $T_1+\cdots+T_n$. 条件 $\mathbf{E}(T_i)<\infty$意味着 A_j 是一个正常返链.

此链的不变概率 π 可以通过求解方程组

$$\pi(n+1) = p(n,n+1)\pi(n) = (1-\lambda_{n+1})\pi(n) = \frac{1-F(n+1)}{1-F(n)}\pi(n), \quad n>0,$$

$$\pi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0)\pi(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{n+1}\pi(n)$$

得到. 第一个方程组可通过递归方式求解, 结果为

$$\pi(n) = [1-F(n)]\pi(0).$$

为求解 $\pi(0)$ 的值, 运用$\sum\pi(n)=1$, 我们可验证

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}[1-F(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}p_m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}p_m\sum_{n=0}^{m-1}1 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}mp_m = \mu.\end{aligned}$$

特别地,

$$\pi(0) = \frac{1}{\mu}.$$

注意到

$$\mathbf{P}\{\text{时刻 } j \text{ 发生的事件}\} = \mathbf{P}\{N_j > N_{j-1}\} = \mathbf{P}\{A_j = 0\}.$$

145

由于 A_j 是一个非周期、不可约、正常返的马尔可夫链, 我们知道

$$\lim_{j\to\infty}\mathbf{P}\{A_j=0\} = \pi(0) = \frac{1}{\mu}.$$

这就给出了离散更新过程的第二更新定理.

我们也推导出了年龄的极限分布,

$$\psi_A(n) = \lim_{j\to\infty}\mathbf{P}\{A_j=n\} = \pi(n) = \frac{1-F(n)}{\mu}.$$

考虑剩余寿命,

$$B_j = \min\{k>0 : N_{j+k} > N_j\}.$$

我们可以计算 B_j 的极限分布,

$$\psi_B(n) = \lim_{j\to\infty}\mathbf{P}\{B_j = n\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{j\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{P}\{A_j = m\}\mathbf{P}\{B_j = n \mid A_j = m\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\pi(m)\mathbf{P}\{B_j = n \mid A_j = m\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-F(m)}{\mu}\,\frac{p_{n+m}}{1-F(m)} \\
&= \frac{1}{\mu}\sum_{m=0}^{\infty}p_{n+m} \\
&= \frac{1-F(n-1)}{\mu}.
\end{aligned}
$$

也就是说，

$$\psi_B(n) = \lim_{j\to\infty}\mathbf{P}\{B_j = n\} = \lim_{j\to\infty}\mathbf{P}\{A_j = n-1\} = \psi_A(n-1).$$

剩余寿命的极限分布和年龄的极限分布除了相差 1 外是相同的. 相差 1 是因为剩余寿命的最小值为 1 而年龄的最小值为 0 的事实所造成的. 时刻 j 零件的全寿命为

146

$$C_j = A_j + B_j,$$

我们可计算

$$
\begin{aligned}
\psi_C(n) &= \lim_{j\to\infty}\mathbf{P}\{C_j = n\} \\
&= \lim_{j\to\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\mathbf{P}\{A_j = m\}\mathbf{P}\{C_j = n \mid A_j = m\} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\pi(m)\mathbf{P}\{C_j = n \mid A_j = m\} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{1-F(m)}{\mu}\,\frac{p_n}{1-F(m)} \\
&= \frac{1}{\mu}\sum_{m=0}^{n-1}p_n \\
&= \frac{np_n}{\mu}.
\end{aligned}
$$

这是与（6.10）类似的离散形式.

例 1 **伯努利过程.** 与泊松过程类似的离散形式为伯努利过程. 令 $0<p<1$，设 X_1，X_2，… 为相互独立的随机变量且 $\mathbf{P}\{X_i=1\}=1-\mathbf{P}\{X_i=0\}=p$. $N_j=X_1+\cdots+X_j$ 表示在前 j 次试验中“成功”的次数，且每次试验中成功的概率为 p. 等待时间 T_i 服从几何分布

$$\mathbf{P}\{T_i = n\} = (1-p)^{n-1}p,\quad n\geqslant 1,$$

均值为 $\mu=\dfrac{1}{p}$. 年龄的渐近分布为

$$\psi_A(n) = \frac{1-F(n)}{\mu} = p\sum_{j=m+1}^{\infty}(1-p)^{m-1}p = p(1-p)^n,$$

即年龄比服从几何分布的随机变量少 1. 剩余寿命服从参数为 p 的几何分布. 全寿命的渐近分布为

$$\phi_C(n) = np^2(1-p)^{n-1},$$

它是分别具有分布为 ϕ_A 和 ϕ_B 的两个独立随机变量之和的分布. 年龄和剩余寿命渐近独立.

例 2 设 F 是 $\{1,\cdots,10\}$ 上的均匀分布，且 $\mu=\frac{11}{2}$. 则

$$F(n) = \frac{n}{10}, \quad n = 1,2,\cdots,10.$$

147

年龄的渐近分布为

$$\psi_A(n) = \frac{1-F(n)}{\mu} = \frac{10-n}{55}, \quad n = 0,\cdots,9.$$

剩余寿命的渐近分布为

$$\psi_B(n) = \frac{1-F(n-1)}{\mu} = \frac{11-n}{55}, \quad n = 1,\cdots,10.$$

全寿命的渐近分布为

$$\psi_C(n) = \frac{n}{55}, \quad n = 1,2,\cdots,10.$$

在这种情形下，年龄和剩余寿命不是渐近独立的.

6.4 $M/G/1$ 和 $G/M/1$ 排队模型

我们考虑 6.1 节中例 4. 顾客按速率为 λ 的泊松过程到达仅有一个服务员的队列. 顾客接受服务（先到者先接受服务）且服务时间是分布函数为 F 的一个随机变量，其均值 $\mu<\infty$. 我们称服务速率为$\frac{1}{\mu}$，尽管服务时间不是指数型的. 服务时间与到达时间相互独立. 如之前所提及的那样，存在一个自然更新过程，其中 $R_1,R_2,\cdots$表示“闲期”的总时间，而 $S_1,S_2,\cdots$表示“忙期”的总时间. 如果队列起始于空闲，即 $X_0=0$，其中 X_t 表示时刻 t 队列中的人数（包括正在接受服务的人)，则直到下一个闲期开始的时刻可由 $T_1=R_1+S_1$ 给出，直到第 $n+1$ 次闲期开始的时刻为

$$T_1+\cdots+T_n,$$

其中 $T_i=R_i+S_i$.

时刻 R_i 是速率为 λ 的指数分布，均值为$\frac{1}{\lambda}$. 不易求出 S_i 的分布. 然而，我们可求出 $\mathbf{E}(S_i)$. 假设服务速率大于到达速率，即

$$\mu\lambda<1.$$

考虑从一个忙期开始，即 $X_t=1$. 考虑一个离散时间的马尔可夫链 Y_n，它代表紧接着第 n 个顾客完成服务后队列中的顾客数. 我们假设从 $Y_0=1$ 开始. Y_1 可由在第一个服务时间内进入队列中的顾客数减 1(离开队列的顾客）得到. 当 $i>1$ 时，Y_i 通过 Y_{i-1}加上第 i 个顾客接受服务时进入系统的顾客数减 1 得到. 令

148

$$\tau = \min\{n: Y_n=0\}.$$

如果 $U_1,U_2,\cdots$表示顾客的服务时间，那么第一个忙期的长度为

$$S_1 = U_1+U_2+\cdots+U_\tau.$$

$U_1, U_2, \cdots$ 是相互独立的随机变量，且分布函数均为 F，但 U_i 与 τ 不独立．如果设 $\mathcal{F}_n$ 为包含在 $Y_1, \cdots, Y_n$ 和 $U_1, \cdots, U_n$ 中的信息，那么 τ 是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的停时，且 $U_{n+1}, U_{n+2}, \cdots$ 与 $\mathcal{F}_n$ 独立．如果 $\mathbf{E}(\tau)<\infty$，那么由瓦尔德（Wald）等式有

$$\mathbf{E}(S_1) = \mathbf{E}(U_i)\mathbf{E}(\tau). \tag{6.11}$$

在习题 5.14 中已证明如果 $\mathbf{E}(Y_i)<0$，那么 $\mathbf{E}(\tau)<\infty$，且在这种情形下，可应用瓦尔德等式证明

$$\mathbf{E}(\tau) = -\frac{1}{\mathbf{E}(Y_i)}.$$

让我们来计算 $\mathbf{E}(Y_i)$．在服务时间 U_i 内有 k 个顾客到达队列的概率为

$$q_k = \int_0^\infty \mathbf{P}\{k \text{ 到达} \mid U_i = s\} \mathrm{d}F(s)$$
$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s\lambda}(s\lambda)^k}{k!} \mathrm{d}F(s).$$

从而到达顾客的期望值为

$$\sum_{k=0}^\infty k q_k = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty k \frac{\mathrm{e}^{-s\lambda}(s\lambda)^k}{k!} \mathrm{d}F(s)$$
$$= \int_0^\infty s\lambda \,\mathrm{d}F(s) = \lambda\mu.$$

因此 $\mathbf{E}(Y_i) = \lambda\mu - 1$ 且

149

$$\mathbf{E}(\tau) = \frac{1}{1-\lambda\mu} = \frac{\rho}{\rho-\lambda},$$

这里我们记 $\rho = \frac{1}{\mu}$ 为服务速率．一个忙期长度的期望值为

$$\mathbf{E}(S_1) = \mathbf{E}(U_i)\mathbf{E}(\tau) = \frac{1}{\rho-\lambda}.$$

队列繁忙的比例为

$$\frac{\mathbf{E}(S_1)}{\mathbf{E}(R_1)+\mathbf{E}(S_1)} = \frac{\lambda}{\rho}.$$

注意当 $\lambda \to \rho$ 时这个比率为 1.

如果 $\lambda = \rho$，那么可证明链 Y_n 为常返的（见习题 2.15），因此队列的长度可以无穷次返回 0．然而，从长远看，队列为空的时间比例趋近于 0．如果 $\lambda > \rho$，链 Y_n 是非常返的，从而队列的长度趋于无穷.

现在我们考虑一个有些不太现实的 $G/M/1$ 排队系统．顾客每次到达一个，等待时间 T_1，$T_2, \cdots$ 的分布函数均为 F，且均值为 $\frac{1}{\lambda}$．系统中只有一个服务员，服务时间服从速率为 ρ 的指数分布．我们假设服务速率大于顾客的到达速率，即 $\rho > \lambda$.

存在一个自然马尔可夫链嵌入在 $G/M/1$ 排队系统中．考虑 Y_n 为第 n 个顾客到达前系统中的瞬时顾客数．（假设队列开始为空，即 $Y_0 = 0$.）容易验证 Y_n 是状态空间为 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的一个马尔可夫链.

为了计算此链的转移概率，为了简单起见，我们首先考虑若队列中有无穷多顾客时将发生的情况．设 q_k 为相继到达排队系统的两个顾客间的时间间隔中恰好有 k 个个体接受服务的概

率．如果到达时间为 t，那么接受服务的顾客数服从参数为 ρt 的泊松分布．从而

$$q_k = \int_0^\infty \mathbf{P}\{k \text{ 接受服务} \mid T_i = t\} \mathrm{d}F(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} \frac{(\rho t)^k}{k!} \mathrm{d}F(t).$$

接受服务的顾客数的期望值为

$$\sum_{k=0}^\infty k q_k = \sum_{k=0}^\infty k \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho t} \frac{(\rho t)^k}{k!} \mathrm{d}F(t) = \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^\infty k \mathrm{e}^{-\rho t} \frac{(\rho t)^k}{k!}\right] \mathrm{d}F(t) = \int_0^\infty \rho t \,\mathrm{d}F(t) = \frac{\rho}{\lambda} > 1.$$

150

现在，如果 $Y_n = j$，那么第 n 个顾客到达时队列后队列有 $j+1$ 个顾客．排队系统将服务所有的顾客直到队列为空．容易得出

$$\mathbf{P}\{Y_{n+1} = k \mid Y_n = j\} = q_{(j+1)-k}, \quad k = 1, \cdots, j+1,$$
$$\mathbf{P}\{Y_{n+1} = 0 \mid Y_n = j\} = \sum_{k \leqslant 0} q_{(j+1)-k} = \sum_{i \geqslant j+1} q_i.$$

如果令 $p_l = q_{1-l}$，$l = 1$，0，-1，…，那么 Y_n 的转移概率为

$$p(j,k) = p_{k-j}, \quad k = 1, \cdots, j+1,$$
$$p(j,0) = \sum_{k \leqslant 0} p_{k-j}.$$

可以证明（见习题 2.16）这是一个正常返马尔可夫链．它的不变概率的形式为

$$\pi(j) = \beta^j (1-\beta),$$

其中 β 是

$$\beta = \sum_{j=0}^\infty q_j \beta^j$$

的唯一解，且 $\beta \in (0, 1)$．很难计算 β 的解析解，但可以由数值方法计算．

6.5 习题

6.1 假设零件的寿命 T_i 以小时计算，服从 [100，200] 上的均匀分布．一旦零件损坏，立即更换且假设此过程能持续足够长的时间到达平稳．

(a) 当前零件运转至少 50 个小时的概率是多少？

(b) 当前零件能够再持续运转至少 50 个小时的概率是多少？

(c) 当前零件的全寿命至少是 150 个小时的概率是多少？

(d) 假设已知当前零件已经运行恰好 90 个小时．它将再持续运行至少 50 个小时的概率是多少？

151

6.2 当 T_i 服从均值为 150 的指数分布时，处理与习题 6.1 中同样的问题．

6.3 当 T_i 的密度为

$$f(t)=\frac{1}{t\ln 2},\quad 100<t<200.$$

处理与习题 6.1 中同样的问题.

6.4 当 T_i 的分布为

$$\mathbf{P}\{T_i=100\}=\mathbf{P}\{T_i=200\}=\frac{1}{2}.$$

处理与习题 6.1 中同样的问题.

6.5 设 N_t 表示与 $T_1,T_2,\cdots$ 相联系的更新过程，其中 $T_1,T_2,\cdots$ 为独立同分布的随机变量，均值为 μ.

(a) 解释为什么对任意正整数 j，k 和对任意 t，下述不等式成立：

$$\mathbf{P}\{N_t\geqslant jk\}\leqslant[\mathbf{P}\{N_t\geqslant j\}]^k.$$

(b) 对于更新过程的大数定律，即 (6.2)，表明对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{t(1-\varepsilon)}{\mu}\leqslant N_t\leqslant\frac{t(1+\varepsilon)}{\mu}\right\}=1. \tag{6.12}$$

利用 (a) 和 (6.12) 推导，对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbf{E}\left[N_tI\left\{N_t>\frac{t(1+\varepsilon)}{\mu}\right\}\right]=0.$$

(c) 推导第一更新定理 (6.3).

6.6 假设等待时间 T_i 的分布为

$$\mathbf{P}\{T_i=1\}=\frac{9}{10},\quad \mathbf{P}\{T_i=10\pi\}=\frac{1}{10}.$$

注意时间 T_i 服从一个非格点分布.

(a) 年龄分布 $\Psi_A(n)$ 是什么?

(b) 在无穷大的时刻，剩余寿命期望是什么？与 $\mathbf{E}(T_i)$ 作对比.

6.7 假设有两个品牌的可更换零件，品牌 X 和品牌 Y，由于政治原因，一个厂家同时购买了这两种更换零件. 当一个品牌 X 的零件损坏时替换一个品牌 Y 的零件，当一个品牌 Y 的零件损坏时替换一个品牌 X 的零件. 品牌 X 零件的寿命（经上千小时测量）为 [1, 2] 上的均匀分布，品牌 Y 零件的寿命为 [1, 3] 上的均匀分布. 当 t 很大时，回答下列问题.

152

(a) 当前零件是品牌 X 的概率是多少?

(b) 当前零件的年龄分布是什么?

(c) 当前零件的全寿命的分布是什么?

(d) 如果不是交替使用这两个品牌，而是采用下述原则：当一个零件损坏时，随机地从品牌 X 或品牌 Y 的零件中抽取一个，其概率均为 $\frac{1}{2}$. 此时上述问题的答案是否相同?

6.8 假设顾客按速率为 $\lambda=1$(以小时计) 的泊松过程到达只有一个服务员的队列. 假设服务时间为 $\frac{1}{4}$ 小时，$\frac{1}{2}$ 小时或者 1 小时的概率均为 $\frac{1}{3}$.

(a) 假设队列为空且一个顾客到达. 直到顾客离开的总时间的期望为多少?

(b) 假设队列为空且一个顾客到达. 直到队列再次为空的总时间的期望为多少?

(c) 当 t 很大时，队列中没有顾客的概率是多少?

6.9 试举例说明满足 $\mathbf{E}(T_i)<\infty$ 使得剩余寿命的极限分布均值为无穷大的更新过程.

6.10 假设 $T_1, T_2, \cdots$ 为独立同分布的非负随机变量且 $\mathbf{P}\{T_i=0\}=q\in(0,1)$. 假设 T_i 的分布函数为 F，且均值为 μ，设 G 为给定 $T_i>0$ 时的条件分布函数，

$$G(x)=\mathbf{P}\{T_i\leqslant x\mid T_i>0\}=\frac{F(x)-F(0)}{1-q}.$$

设 $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \cdots$ 为独立同分布的随机变量且分布函数为 G，设 $U(t)$ 和 $\widetilde{U}(t)$ 分别为与 T_i, $\widetilde{T}_i$ 相联系的更新函数. 证明:

$$\widetilde{U}(t)=(1-q)U(t).$$

153

第7章 可逆马尔可夫链

7.1 可逆过程

在这一章中，我们将学习一类特殊的马尔可夫链：可逆链. 很多重要的链都是可逆的，我们可以利用这个事实来理解它们的行为特征.

假设有一个连续时间马尔可夫链 X_t，它在状态空间 S(有限或可数无穷的）上取值，其转移速率为 $\alpha(x, y)$. 若 π 是 S 上的任意一个测度，即 S 上的一个非负函数，那么若对于所有的 $x, y \in S$，有

$$\pi(x)\alpha(x,y) = \pi(y)\alpha(y,x),$$

则称这个链是关于测度 π 可逆的（reversible with respect to the measure π). 若对于所有的 x, y，有

$$\alpha(x,y) = \alpha(y,x),$$

则称这个链是对称的. 应该注意的是，一个链是对称的当且仅当它关于均匀测度 $\pi(x)=1(x\in S)$ 是可逆的. 同理，设有一个离散时间的马尔可夫链，其转移矩阵为 $\boldsymbol{P}$，如果对于所有的 x, $y\in S$，有

$$\pi(x)\boldsymbol{P}(x,y) = \pi(y)\boldsymbol{P}(y,x),$$

则称该链关于测度 π 可逆. 同样，如果 $\boldsymbol{P}(x, y)=\boldsymbol{P}(y, x)$，则称这个链是对称的. 在下面的两节中，我们将讨论连续时间马尔可夫链，但是类似的讨论同样适用于离散时间链.

例1 设 $G=(V, E)$ 为如1.1节例5所示的图，令 $S=V$，且令

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{d(x)}, \quad (x,y) \in E,$$

其中 $d(x)$ 是与 x 相邻的顶点个数，这是一个类似于例5的连续时间情形. 则该链是关于测度 $\pi(x)=d(x)$ 可逆的. 如果我们选择

155

$$\alpha(x,y) = 1, \quad (x,y) \in E,$$

则该链是对称的，因此也是关于均匀测度可逆的.

例2 设 $G=(V, E)$ 是任意一个图，并令 $g: E\to[0, \infty)$. 这样的一个结构通常被称为一个网络（network). 一个网络产生一个对称的链，若 e 表示连接 x 和 y 的边，则它的转移速率为

$$\alpha(x,y) = \alpha(y,x) = g(e),$$

在电路学中，速率 $g(e)$ 被称为电导系数，其倒数被称为电阻.

例3 假设我们有一个生灭链，其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，它的出生率和死亡率分别为 λ_n 和 μ_n. 换言之，转移速率为

$$\alpha(n,n+1) = \lambda_n, \quad \alpha(n,n-1) = \mu_n.$$

令 $\pi(0)=1$，当 $n>0$ 时，

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}.$$

则该链是关于测度 π 可逆的.

例 4　设 $G=(V, E)$ 是任意一个图，且令 $\pi: V\to(0, \infty)$ 是 G 上的一个正测度. 设任意一个顶点都只与其他有限个顶点相邻，定义：如果 (x, y) 不是 G 的一条边，则 $\alpha(x, y)=0$，且对于 $(x, y)\in E$，有

$$\alpha(x,y) = \min\left\{1,\frac{\pi(y)}{\pi(x)}\right\}.$$

那么 α 生成一个关于测度 π 可逆的链.

如果一个链关于测度 π 可逆，那么

$$\sum_{y\in S}\pi(y)\alpha(y,x) = \pi(x)\sum_{y\in S}\alpha(x,y) = \pi(x)\alpha(x),$$

即 π 是 α 的不变测度. 如果状态空间是有限的，或者状态空间无限且满足 $\sum\pi(x)<\infty$，则我们可以标准化 π 使得它是 α 的一个不变概率. 特别地，若 α 是不可约的，那么我们知道如果 α 关于概率测度 π 是可逆的，则 π 是（唯一）不变测度. 反之，如果一个不可约链是关于 π 可逆的，且有 $\sum\pi(x)=\infty$，那么我们可以得出结论：不存在不变概率测度，因此，该链是零常返的或者非常返的.

可逆性条件用来阐述下面的命题：无论时间是前进还是倒退，达到平衡时的系统看起来是相同的. 为了给出一个不可逆链的简单例子，考虑一个三状态的链，状态空间 $S=\{0,1,2\}$，速率为 156

$$\alpha(0,1) = \alpha(1,2) = \alpha(2,0) = 1,$$
$$\alpha(1,0) = \alpha(2,1) = \alpha(0,2) = 2.$$

很明显，该链是不可约的且不变概率测度为 $\pi(0)=\pi(1)=\pi(2)=\frac{1}{3}$. 如果该链是可逆的，则必须关于测度 π 可逆，然而很明显

$$\pi(0)\alpha(0,)1 \neq \pi(1)\alpha(1,0).$$

7.2　收敛到平稳分布

对于一个链到达一个近似不变概率分布的测度所需要的时间做出估计通常是有用的. 设 X_t 是一个不可约的连续时间马尔可夫链，速率为 $\alpha(x, y)$，其关于概率测度 π 是可逆的. 我们将假设状态空间是有限的，$S=\{1,\cdots,N\}$，但是该情形可以推广到在无穷状态空间上的正常返链. 为简便起见，我们将只考虑 $\mathbf{A}$ 对称的情形（关于均匀测度可逆），但是这些思想对所有的可逆链同样适用.

衡量两个 S 上的概率测度 π 和 ν 之间的“距离”的方法有很多种. 一个十分自然的定义是由下式定义的*总变差*（total variation）距离：

$$\| \pi - \nu \|_{TV} = \max\{ |\pi(A) - \nu(A)| : A \subset S\}.$$

容易知道，最大值在集合 $A=\{x: \pi(x)\geqslant\nu(x)\}$ 上取得. 因此，

$$\begin{aligned}\| \pi - \nu \|_{TV} &= \sum_{\pi(x)\geqslant\nu(x)}(\pi(x) - \nu(x)) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{\pi(x)\geqslant\nu(x)}(\pi(x) - \nu(x)) + \sum_{\pi(x)<\nu(x)}(\nu(x) - \pi(x))\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x\in S}|\pi(x)-\nu(x)|$$

157

$$= \frac{1}{2}\sum_{x\in S}\frac{1}{N}|N\pi(x)-N\nu(x)|.$$

在上式的最后一个表达式中，$\frac{1}{N}$代表 S 上的均匀测度，而 $N\pi$ 和 $N\nu$ 是 π 和 ν 关于该测度的"派生量".

另外一种不是特别自然的距离，但在很多场合易于分析，即 L^2 距离，或称均方（mean-squared）距离：

$$\|\pi-\nu\|_{L^2} = \left[\sum_{x\in S}\frac{1}{N}|N\pi(x)-N\nu(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

注意到 $\|\pi-\nu\|_{L^2}=N^{\frac{1}{2}}\|\pi-\nu\|$，其中 $\|\cdot\|$ 在此处代表 $\mathbf{R}^N$ 上的欧几里得（Euclid）范数. 由柯西-施瓦茨（Cauchy-Schwartz）不等式

$$|\bar{v}\cdot\bar{w}| \leqslant \|\bar{v}\|^{\frac{1}{2}}\|\bar{w}\|^{\frac{1}{2}},$$

可得不等式

$$\|\pi-\nu\|_{L^2}\geqslant 2\|\pi-\nu\|_{\text{TV}}.$$

例 1 考虑一个链，其速率为 $\alpha(i,j)=\frac{b}{N}$，$i\neq j$，其中 $b>0$. 对于任意 i，向量 $\bar{v}$ 满足

$$v^j = \begin{cases} N-1, & i=j \\ -1, & i\neq j, \end{cases}$$

它是特征值 $-b$ 的右特征向量. 该特征向量有一个 $N-1$ 维的子空间；因此，矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $0(1$ 重）和 $-b(N-1$ 重）. 如果 ν 是任意的概率向量，我们可以给出 $e^{tA}\nu$ 的一个精确表达式. 假设开始状态为 x. 该链的初始分布为 ν，等待一个速率为 b(均值为$\frac{1}{b}$）的指数型"闹钟"闹铃，然后根据均匀分布从 N 个位置中选择一个. 如果我们用 π 表示均匀分布，则

$$e^{tA}\nu = e^{-tb}\nu+(1-e^{-tb})\pi.$$

e^{-tb} 项表示闹钟还没有响过的概率，因此，

$$\|e^{tA}\nu-\pi\|_{\text{TV}} = e^{-tb}\|\nu-\pi\|_{\text{TV}}\leqslant e^{-tb},$$
$$\|e^{tA}\nu-\pi\|_{L^2} = e^{-tb}\|\nu-\pi\|_{L^2}.$$

如果该链从状态 x 开始，因此 $\nu(x)=1$，那么 $\|\nu-\pi\|_{L^2}\sim\sqrt{N}$. 可见 L^2 距离依然很大.

尽管有其限制性，我们仍将主要讨论在 L^2 距离下收敛速率的边界问题，因为线性代数的技术可以被用在此处. 如果 $\mathbf{A}$ 是一个对称矩阵，那么可以证明（可参考一本高级线性代数课本）存在一个特征值和特征向量的完备集. 而且所有的特征值都是实数，因此可以将特征值按降序排列：

158

$$0=\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3\geqslant\cdots\geqslant\lambda_N.$$

我们知道 $\lambda_2<0$，因为该链是不可约的. 考虑到对称性，如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积，则

$$\langle\mathbf{A}\bar{v},\bar{w}\rangle = \langle\bar{v},\mathbf{A}\bar{w}\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}v^i w^j\mathbf{A}(i,j). \tag{7.1}$$

一个满足上述第一个等式的矩阵被称为自伴的（关于均匀测度）且右边的等式通常被称做该矩阵的二次型.

令

$$\bar{1} = \bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_N$$

表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量，因为 $\mathbf{A}$ 是对称的，所以它既是右特征向量也是左特征向量. 根据 (7.1) 可以看到

$$\lambda_j \langle \bar{v}_j, \bar{v}_k \rangle = \langle \mathbf{A}\bar{v}_j, \bar{v}_k \rangle = \langle \bar{v}_j, \mathbf{A}\bar{v}_k \rangle = \lambda_k \langle \bar{v}_j, \bar{v}_k \rangle,$$

因此，不同特征值对应的特征向量是正交的 ($\langle \bar{v}_j, \bar{v}_k \rangle = 0$). 所以我们可以选择特征向量使得它们相互正交. 这些特征向量也是矩阵 $e^{t\mathbf{A}}$ 对应于特征值 $e^{t\lambda_j}$ 的特征向量，

$$e^{t\mathbf{A}}\bar{v}_j = e^{t\lambda_j}\bar{v}_j.$$

令 $U \subset R^N$ 表示由向量集 $\{\bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_n\}$ 生成的 $N-1$ 维子空间，或者等价地，它是满足如下条件的向量 $\bar{w}$ 的集合：

$$\sum_{i=1}^{N} w^i = 0.$$

通过将任意的 $\bar{w} \in U$ 写成左特征向量的线性组合，我们可以很容易地看出

$$\| \bar{w} e^{t\mathbf{A}} \| \leqslant e^{t\lambda_2} \| \bar{w} \|,$$

其中 $\| w \|^2 = \sum_{i=1}^{N} [w^i]^2$. 现在假设该链从任意一个概率向量 $\bar{\nu}$ 开始. 我们可以写成

$$\bar{\nu} = \bar{\pi} + \bar{w},$$

[159]

其中 $\bar{\pi} = \left(\frac{1}{N}\right)\bar{1}$ 是不变概率并且 $\bar{w} = \bar{\nu} - \bar{\pi} \in U$. 因为 $\bar{\pi} e^{t\mathbf{A}} = \bar{\pi}$，我们可以总结出

$$\| \bar{\nu} e^{t\mathbf{A}} - \bar{\pi} \|_{L^2} = \| (\bar{\nu} - \bar{\pi}) e^{t\mathbf{A}} \|_{L^2} \leqslant e^{t\lambda_2} \| \bar{\nu} - \bar{\pi} \|_{L^2}.$$

可以看出收敛速率可以由 λ_2 的大小进行有效控制，如果可以给出 $|\lambda_2|$ 的下界，则我们可以很好地限制收敛速率.

例 2 考虑一个在圆上的随机游动，即这样一条链：其状态空间为 $S = \{1, \cdots, N\}$，若 $|x-y| = 1(\mathrm{mod} N)$，则速率 $\alpha(x, y) = \frac{1}{2}$. 该链关于 S 上的均匀测度是可逆的. 此例中矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值可以被完全确定（见习题 7.9），

$$\lambda_j = \cos\left(\frac{(j-1)2\pi}{N}\right) - 1, \quad j = 1, 2, \cdots, N.$$

特别地，当 N 很大时（由余弦函数的泰勒级数展开），$\lambda_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - 1$ 近似于 $-2\pi^2 N^{-2}$.

这是说为了达到平稳分布即 e^{-1} 上的均匀分布，它要花费大约 N^2 个时间单位. 而如果我们回想起一个简单随机游动以与 N^2 同阶的步数行走大约 N 的距离，那么“它以与 N^2 同阶的步数趋近于平稳分布”这一命题是讲得通的.

例 3 令状态空间 S 表示所有长度为 N 的二进制序列，即所有 N 元组 $\{a_1, \cdots, a_N\}$，$a_i \in \{0, 1\}$. 注意到状态空间有 2^N 个元素. 考虑一个链，它满足：如果 x 和 y 是两个仅有一个元素不同的序列，那么 $\alpha(x, y) = 1$，其他情况 $\alpha(x, y) = 0$. 这个过程有时被称为 N 维超立方上的随

机游动. 显然，这个过程关于均匀测度是可逆的. 可以看到$-\frac{2j}{N}$是一个重数为$\binom{N}{j}$的特征值. 在这种情况下，$\lambda_2=-\frac{2}{N}$且它以与 N 同阶的步数趋近于平稳分布. 这个结论可以从直观上理解：注意到如果步数值与 N 同阶，那么大部分元素将有机会至少改变一次.

现在令 U 表示和 $\overline{1}$ 正交的向量集合，即满足下列条件的向量 $\overline{w}$ 的集合：

$$\sum_{i=1}^{N} w^i = 0.$$

如果 $\overline{w}\in U$，那么 $A\,\overline{w}\in U$. 如果写为

160

$$\overline{w} = a_2\overline{v}_2 + \cdots + a_n\overline{v}_n,$$

这里 $a_i=\langle\overline{v}_i, \overline{w}\rangle$，我们可以看到

$$\begin{aligned}\langle\overline{w},\boldsymbol{A}\overline{w}\rangle &= \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=2}^{N}\langle a_i\overline{v}_i, a_j\boldsymbol{A}\overline{v}_j\rangle \\ &= \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=2}^{N} a_i a_j\lambda_j\langle\overline{v}_i,\overline{v}_j\rangle \\ &= \sum_{i=2}^{N} a_i^2\lambda_i\langle\overline{v}_i,\overline{v}_i\rangle \\ &\leqslant \lambda_2\sum_{i=2}^{n}\langle a_i\overline{v}_i, a_i\overline{v}_i\rangle = \lambda_2\langle\overline{w},\overline{w}\rangle.\end{aligned}$$

同样地，如果选择 $\overline{w}=\overline{v}_2$，那么我们得到以上表达式的等式形式. 以上推导的是第二个特征值的瑞利-里茨（Rayleigh-Ritz）变分公式，

$$\lambda_2 = \sup\frac{\langle\overline{w},\boldsymbol{A}\overline{w}\rangle}{\langle\overline{w},\overline{w}\rangle},$$

其中上确界在所有的满足以下条件的向量 $\overline{w}$ 中选取：

$$\langle\overline{1},\overline{w}\rangle = \sum_{i=1}^{N} w^i = 0.$$

λ_2 的下界（即$|\lambda_2|$的上界）可以通过考虑特殊的 $\overline{w}\in U$ 来得到. 如果 $T\subset S$，令 $\overline{w}\in U$ 且它的元素满足

$$w^i = \begin{cases}1-\pi(T), & i\in T\\ -\pi(T), & i\notin T,\end{cases}$$

$$\pi(T) = \frac{T\text{ 中的元素数}}{N}.$$

注意到 $\langle\overline{1}, \overline{w}\rangle=0$ 且

$$\begin{aligned}\langle\overline{w},\overline{w}\rangle &= \sum_{i\in T}[1-\pi(T)]^2 + \sum_{i\notin T}\pi(T)^2 \\ &= [1-\pi(T)]^2 N\pi(T) + \pi(T)^2 N[1-\pi(T)] = N\pi(T)[1-\pi(T)].\end{aligned}$$

161

如果 $i\in T$，则

$$
\begin{aligned}
(A\overline{w})^i &= \sum_j A_{ij} w^j \\
&= -\alpha(i)[1-\pi(T)] + \sum_{j\in T, j\neq i} \alpha(j,i)[1-\pi(T)] - \sum_{j\notin T} \alpha(j,i)\pi(T) \\
&= -\sum_{j\notin T} \alpha(j,i)[1-\pi(T)] - \sum_{j\notin T} \alpha(j,i)\pi(T) \\
&= -\sum_{j\notin T} \alpha(j,i).
\end{aligned}
$$

同样地，如果 $i\notin T$，则

$$(Aw)^i = \sum_{j\in T} \alpha(j,i).$$

因此

$$
\begin{aligned}
(\overline{w}, A\overline{w}) &= \sum_i w^i (A\overline{w})^i \\
&= \sum_{i\in T} [1-\pi(T)] \sum_{j\notin T} [-\alpha(j,i)] + \sum_{i\notin T} [-\pi(T)] \sum_{j\in T} \alpha(j,i) \\
&= -\sum_{i\in T} \sum_{j\notin T} \alpha(j,i).
\end{aligned}
$$

定义 κ 为

$$\kappa = \inf_{T\subset S} \frac{\sum_{i\in T} \sum_{j\notin T} \alpha(i,j)\pi(i)}{\pi(T)[1-\pi(T)]}.$$

那么通过在瑞利-里茨公式中考虑 $\overline{w}$ 的选择，我们得到

$$|\lambda_2| \leqslant \kappa.$$

不幸的是，这一边界通常不是很好的．一个很大的研究领域都关注的是找到更好的方法来估计 λ_2；在本书中，我们将不做任何更进一步的讨论．

7.3 马尔可夫链算法

马尔可夫链理论的一个近期应用是对随机系统的蒙特卡罗（Monte Carlo）模拟．蒙特卡罗模拟的思想很简单：为了理解一个随机系统，我们在计算机上做很多的实验，然后看它的表现．这些模拟总是利用一个随机数发生器，一般地，它是产生独立的且服从 0 和 1 之间均匀分布的数字的一个函数．（实际上，一个计算机只能产生伪随机数，且对于伪随机数发生器是不是足够“随机”是一个很值得研究的问题．我们这里将不考虑这个问题，而是仅仅假设已经有了一个能产生独立的且服从 [0，1] 上的均匀分布的随机数 U_1，$U_2,\cdots$ 的方法．） 162

作为一个例子，假定我们对元素为 0 和 1 的“随机”矩阵的性质感兴趣．作为一个概率空间，我们可以选择满足以下条件的 $N\times N$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 组成的集合 S：

$$\boldsymbol{M}(i,j) = 0 \text{ 或 } 1, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant N.$$

一个自然概率测度可以是在所有 2^{N^2} 个这样的矩阵上的均匀测度．写出一个算法使其能够产生服从这种分布的随机矩阵是很简单的——选择 N^2 个均匀随机数 $U(i，j)$，$1\leqslant i$，$j\leqslant N$，并设

$$M(i,j)=\begin{cases}0, & U(i,j)<0.5,\\ 1, & U(i,j)\geqslant 0.5.\end{cases}$$

为了产生这样一个 $N\times N$ 矩阵，这个算法的速度的阶数为 N^2，显然，S 上的每个矩阵被产生的概率是相同的.

现在假设改变我们的概率空间并认为我们只对 S 上没有两个连续 1 的矩阵感兴趣. 令 T 表示 S 上没有两个连续 1 的矩阵集合，即矩阵 $\boldsymbol{M}\in S$，使得如果 $\boldsymbol{M}(i,\ j)=1$，

$$\boldsymbol{M}(i-1,j)=\boldsymbol{M}(i+1,j)=\boldsymbol{M}(i,j-1)=\boldsymbol{M}(i,j+1)=0,$$

同时假设我们想要把均匀概率测度考虑在 T 上（从统计物理学的视角，这个测度是一个自然测度，其中 1 可表示粒子，且两个粒子之间存在排斥作用阻止它们靠得太近）. 尽管很容易定义这个测度，但是确定 T 的元素个数 $c(N)$ 是一个很难的问题. 可以证明存在一个常数 $\beta\in(1,\ 2)$，使得

$$\lim_{N\to\infty} c(N)^{\frac{1}{N^2}}=\beta.$$

（所以 T 的元素个数近似为 β^{N^2}）但是 β 的确切值不知道. 然而我们仍然对这样的矩阵的性质感兴趣，因此想要从 T 上的均匀分布中抽样.

虽然构造一个有效算法使得得到的样本精确地来自均匀分布非常难（即使我们有一个这样的算法，随机数发生器的误差也可能会使样本偏离确切的样本），但是我们可以构造这样的一个有效算法，它从大致为均匀分布的分布中抽样. 我们所要做的是，考虑一个状态空间为 T 的不可约马尔可夫链，它的不变测度服从均匀分布. 我们可以从 T 的任何矩阵开始该链；运行该链足够长的时间使得它接近平稳分布，然后选择在此时刻的状态矩阵.

163

对于这个例子，一个算法如下：1）从任何一个矩阵 $\boldsymbol{M}\in T$ 开始，例如从所有元素为 0 的矩阵开始；2）从这个矩阵中随机选择一个元素，即从含 N^2 个有序对的均匀分布中选择一个有序对 $(i,\ j)$；3）考虑只改变 $\boldsymbol{M}$ 的第 $(i,\ j)$ 个位置的元素得到的矩阵. 如果得到的新矩阵在 T 中，我们令它为该马尔可夫链新的取值；如果新的矩阵不属于 T，那么我们对该马尔可夫链的取值不作更改；返回到步骤 2). 这个算法是状态空间为 T 的离散时间马尔可夫链的一个模拟，并且如果 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}'\in T$ 仅仅是一个元素不同，则转移概率为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}')=N^{-2},$$

如果 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}'$ 有多于一个元素不同，则 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{M}')=0$；且无论 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{M})$ 取何值可使得转移矩阵的行的和为 1. 显然，$\boldsymbol{P}$ 是一个对称矩阵，不难看出它是不可约的. 因此 $\boldsymbol{P}$ 是一个可逆马尔可夫链，状态空间为 T，且它的不变分布为均匀测度.

当然，我们需要知道让链运行多长时间从而能保证它接近不变分布. 和前一节提到的一样，这个问题归结为估计该马尔可夫链第二特征值的问题. 不幸的是，估计这个特征值常常比证明此链存在右不变测度（此例中很容易证明）难得多. 在这个例子中，显然我们需要至少 N^2 步来接近不变分布，因为每个元素都要存在一个被改变的可能.

我们将给出运用这种算法的其他一些例子. 在所有这些例子中，此算法是很有效的，尽管在一些例子中仅仅给出了部分粗糙的分析过程.

例 1 **Ising 模型**. 令 S 是元素为 1 或者 −1 的 $N\times N$ 矩阵构成的一个集合. 对于任意 $\boldsymbol{M}\in S$，

我们定义这个矩阵的“能量”为

$$H(\boldsymbol{M}) = -\sum_{(i,j)\sim(i',j')} \boldsymbol{M}(i,j)\boldsymbol{M}(i',j'),$$

其中 $(i, j)\sim(i', j')$，如果元素相互之间是“最近邻”，且

$$|i-i'|+|j-j'|=1.$$

$\boldsymbol{M}(i, j)$ 的值称为在位置 (i, j) 的“旋转”，如果所有的旋转都相等，那么能量最低. Ising 模型给出了 S 上的一个概率分布，这个概率分布给低能量的矩阵最高的权重. 对任意 $a>0$，我们设

$$\pi_a(\boldsymbol{M}) = \frac{\exp\{-aH(\boldsymbol{M})\}}{\sum_{\boldsymbol{M}'\in S}\exp\{-aH(\boldsymbol{M}')\}}.$$

164

这是一个定义合理的概率测度，尽管很难计算标准化因子

$$Z(a) = \sum_{\boldsymbol{M}'\in S}\exp\{-aH(\boldsymbol{M}')\}.$$

如果 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}'$ 是两个只有一个元素不相等的矩阵，我们可以很容易地计算 $\frac{\pi_a(\boldsymbol{M})}{\pi_a(\boldsymbol{M}')}$，而不需要计算 $Z(a)$.

如果矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}'$ 只有一个元素不同，则写成 $\boldsymbol{M}\sim\boldsymbol{M}'$. 我们定义 $\boldsymbol{P}_a$ 为

$$\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}') = \frac{1}{N^2}\min\left\{1,\frac{\pi_a(\boldsymbol{M}')}{\pi_a(\boldsymbol{M})}\right\},\boldsymbol{M}\sim\boldsymbol{M}'$$

及

$$\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}) = 1-\frac{1}{N^2}\sum_{\boldsymbol{M}'\sim\boldsymbol{M}}\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}').$$

换言之，我们运行如下的算法：1）从一个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 开始；2）随机地选择这个矩阵的一个元素且令 $\boldsymbol{M}'$ 表示只在那个元素处和 $\boldsymbol{M}$ 不相等的矩阵；3）以概率 $\min\{1, \pi_a(\boldsymbol{M}')/\pi_a(\boldsymbol{M})\}$ 转移到矩阵 $\boldsymbol{M}'$，否则保持在矩阵 $\boldsymbol{M}$. 容易验证这是一个关于 π_a 的不可约可逆马尔可夫链.

例 2 上面的例子是一个一般算法的典型情形. 假定 $G=(V, E)$ 是一个连通图，使得每个顶点最多与 K 个其他顶点相连. 假定在 V 上给定一个正的函数 f，且令 π 是概率测度

$$\pi(v) = \frac{f(v)}{\sum_{w\in V}f(w)}.$$

如果 $(v, w)\in E$，则写成 $v\sim w$，并设

$$\boldsymbol{P}(v,w) = \frac{1}{K}\min\left\{1,\frac{f(w)}{f(v)}\right\}, \quad v\sim w,$$

且

$$\boldsymbol{P}(v,w) = 1-\sum_{w\sim v}\boldsymbol{P}(v,w).$$

那么 $\boldsymbol{P}$ 是一个不可约马尔可夫链，它关于 π 是可逆的. 这种形式的算法常常被称为米特罗波利斯（Metropolis）算法.

例 3 存在一类相似的算法，被称做吉布斯（Gibbs）采样器. 假定我们有 n 个变量 $(x_1, \cdots,$

165 x_n)，每个变量可以在 K 个值 $\{a_1,\cdots,a_K\}$ 中取一个值. 令 S 表示 K^n 个可能的 n 元组构成的集合，并且假定有一个 S 上的正函数 f. 我们想要从如下分布中取样：

$$\pi(x_1,\cdots,x_n)=\frac{f(x_1,\cdots,x_n)}{\sum_{(y_1,\cdots,y_n)\in S}f(y_1,\cdots,y_n)}. \tag{7.2}$$

我们的算法是随机选择一个 $j\in\{1,\cdots,n\}$，然后根据如下条件概率把 x_j 变为 z：

$$\frac{f(x_1,\cdots,x_{j-1},z,x_{j+1},\cdots,x_n)}{\sum_{k=1}^{K}f(x_1,\cdots,x_{j-1},a_k,x_{j+1},\cdots,x_n)}.$$

这就给出了转移概率

$$\boldsymbol{P}((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\frac{1}{n}\frac{f(x_1,\cdots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\cdots,x_n)}{\sum_{k=1}^{K}f(x_1,\cdots,x_{j-1},a_k,x_{j+1},\cdots,x_n)},y_j\neq x_j;y_i=x_i,i\neq j,$$

且 $\boldsymbol{P}((x_1,\cdots,x_n),(x_1,\cdots,x_n))$ 等于使得转移矩阵行和为 1 的任何可能取值. 同样地，我们可以直接看出这是一个关于 π 的不可约可逆马尔可夫链. 同样注意到为了运行该链，我们永远不需要计算 (7.2) 的分母.

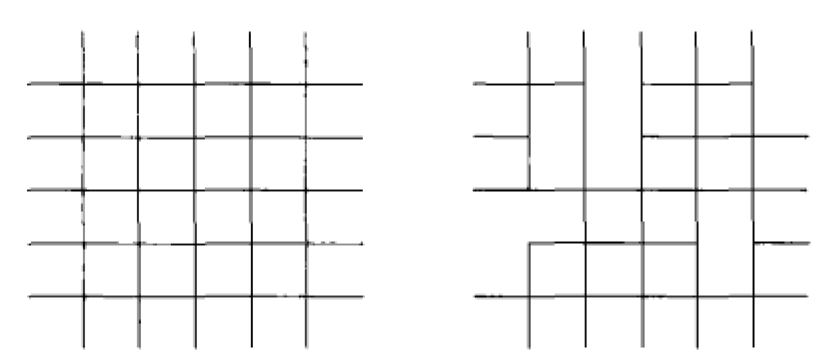
Ising 模型可以通过一个例子来考虑，这里 $n=N^2$，$K=2$，且可能的取值为 -1，1. 在这种情况下，我们得到

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}')=\frac{1}{N^2}\frac{\exp\{-aH(\boldsymbol{M}')\}}{\exp\{-aH(\boldsymbol{M})\}+\exp\{-aH(\boldsymbol{M}')\}},$$

如果 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}'$ 仅仅一个元素不同.

7.4 常返的判定准则

在这一节中，我们给出带对称速率的随机游动的有用的单调性结果. 为了解释结果的有用性，我们考虑 Z^2 上的两个可能速率. 第一个是，如果 $|x-y|=1$，那么 $\alpha(x, y)=1$；其他情况等于 0. 这和二维的简单随机游动相对应，我们已经看到它是常返的. 对于另外一个速率，假定我们如下面解释的那样从整格点中删掉一些边. 更确切地，假定我们有格点的边集的一个子集 B，并申明仅当边 (x, y) 属于 B 时，$\alpha(x, y)=1$. 166



我们的结果是任何对应于这种子集 B 的链仍然是常返的. 假设有一个图 $G=(V, E)$ 且有 E 上的两个对称速率函数 α 和 β.

结论 如果 α 产生一个常返链且对于所有的 (x, y)，有 $\beta(x, y)\leqslant\alpha(x, y)$，那么 β 也能产生一个常返链.

这个结论的证明只需要一点点工作. 我们从一些预备声明开始. 假定把 V 的元素写为 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$(我们假定 V 是无限的，因为对于其他情形，链总是常返的). 令 $A_n=\{x_0, x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. 让我们从 x_0 开始这个链，等待直到它离开 x_0 的首次时刻，然后看链首先到达 A_n 中的哪个点. 令 $h_n(x_0)=h_n(x_0; \alpha)$ 表示首次到达不为点 x_0 的概率（利用转移速率 α). 那么不难证明该链是常返的当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x_0)=0. \tag{7.3}$$

本节的目标是给出 $h_n(x_0)$ 的一个公式，它将帮助我们推导出单调性结果.

在这一节中，我们将假定给出了一个对称转移速率为 $\alpha: E\to[0, \infty)$ 的一个图 $G=(V, E)$. 令 A 表示 V 的一个子集并固定 $x_0\in A$. 令 X_t 表示一个连续时间马尔可夫链，速率为 α，令 τ 为使得 $X_t\in A$ 的所有 $t\geqslant 0$ 的下确界. 定义 $f(y)$ 为从 y 开始第一次访问 A 出现在点 x_0 的概率，

$$f(y)=\mathbf{P}\{X_\tau=x_0 \mid X_0=y\}.$$

容易看到 $f(x_0)=1$ 且当 $y\in A$，$y\neq x_0$ 时 $f(y)=0$. 假定 $y\notin A$. 那么 y 第一次访问的新点为 z 的概率为$\frac{\alpha(y, z)}{\alpha(y)}$，这里我们同样写为 $\alpha(y)=\sum_{z\in V}\alpha(y, z)$. 为了研究第一次移动，我们看到 [167]

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{z\in V}\mathbf{P}\{\text{第一新点是 } z\}f(z) \\ &= \sum_{z\in V}\frac{\alpha(y,z)}{\alpha(y)}f(z), \end{aligned}$$

或者

$$\alpha(y)f(y)=\sum_{z\in V}\alpha(y,z)f(z). \tag{7.4}$$

满足 (7.4) 的函数 f 被称为在 y 处 α 调和的. 我们已经证明给定的 f 在 $y\notin A$ 处是 α 调和的，且通过一点儿附加的工作，可以证明 f 是在 $y\notin A$ 处 α 调和的唯一函数，且它满足边界条件 $f(x_0)=1$，$f(y)=0$，$y\in A$，$y\neq x$.

我们现在把 f 看做一个最小化一个特殊泛函（一个泛函是一个函数的实值函数）的函数. 对于任意的 g，令

$$Q_\alpha(g)=\sum_{x\in V}\sum_{y\in V}\alpha(x,y)(g(x)-g(y))^2.$$

假定我们只考虑满足边界条件 $g(x_0)=1$，$g(y)=0$，$y\in A$，$y\neq x$ 的那些函数 g. 令 $\overline{g}$ 表示满足这些边界条件且最小化 Q_α 的函数. 那么在任意的 $y\notin A$，在 y 处对 $\overline{g}$ 进行扰动，而保持其他的值不变，可以增加 Q_α. 换言之，如果我们定义 $\overline{g}_\epsilon(z)$ 为

$$\overline{g}_\epsilon(z)=\begin{cases}\overline{g}(z), & z\neq y,\\ \overline{g}(y)+\epsilon, & z=y,\end{cases}$$

那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}Q_\alpha(\overline{g}_\epsilon)\right|_{\epsilon=0}=0.$$

通过简单的计算可以证明：当且仅当对于所有的 $y\notin A$ 以下条件满足时，上式成立：

$$\sum_{z\in V}\overline{g}(z)\alpha(y,z)=\sum_{z\in V}\overline{g}(y)\alpha(y,z)=\overline{g}(y)\alpha(y).$$

换言之，$\bar{g}$ 是在每个 $y\notin A$ 上 α 调和的且满足边界条件的函数. 由于 f 是唯一这样的函数，因此 $\bar{g}=f$. 综上所述，如上定义，f 也是满足边界条件 $g(x_0)=1$，$g(y)=0$，$y\in A$，$y\neq x$ 且最小化 $Q_\alpha(g)$ 的函数.

168

现在我们利用"分部求和"给出 $Q_\alpha(f)$ 的另一个表达式. 我们开始写为

$$\begin{aligned}Q_\alpha(f) &= \sum_{x\in V}\sum_{y\in V}\alpha(x,y)(f(x)-f(y))^2\\&= \sum_x\sum_y\alpha(x,y)f(x)(f(x)-f(y))-\sum_x\sum_y\alpha(x,y)f(y)(f(x)-f(y))\\&= 2\sum_x\sum_y\alpha(x,y)f(x)(f(x)-f(y)).\end{aligned}$$

最后一个等式利用了 α 的对称性. 由于 $f(x_0)=1$ 且 $f(y)=0$，$y\in A$，$y\neq x$，我们可以写为

$$2\sum_y\alpha(x_0,y)(1-f(y))+2\sum_{x\notin A}f(x)\sum_y\alpha(x,y)(f(x)-f(y)).$$

但是，如果 $x\notin A$，那么 f 在 x 处是 α 调和的，

$$\sum_y\alpha(x,y)f(y)=\sum_y\alpha(x,y)f(x)=\alpha(x)f(x).$$

因此求和中的第二项等于 0，我们得到

$$Q_\alpha(f)=2\sum_{y\in V}\alpha(x_0,y)(1-f(y))=2\alpha(x_0)\sum_{y\in V}\frac{\alpha(x_0,y)}{\alpha(x_0)}(1-f(y)).$$

现在令 $h(x_0)$ 表示链从 x_0 开始且它的第一次访问为 A 中点时的概率，第一次离开 x_0 后，访问不为 x_0 的其他某个点. 考虑第一步移动，我们可以看到

$$h(x_0)=\sum_{y\in V}\frac{\alpha(x_0,y)}{\alpha(x_0)}(1-f(y))=\frac{Q_\alpha(x_0,A)}{2\alpha(x_0)},$$

其中

$$Q_\alpha(x_0,A)=\inf\sum_{x\in V}\sum_{y\in V}\alpha(x,y)(g(x)-g(y))^2,$$

最小值在满足条件 $g(x_0)=0$ 和 $g(y)=1$，$y\in A$，$y\neq x$ 的所有函数 g 中选取. 公式的漂亮形式使得我们意识到如果 $\beta(x,y)$ 是满足条件 $\beta(x,y)\leqslant\alpha(x,y)$ 的一个速率集对于所有的 x，$y\in V$)，那么

169

$$Q_\beta(x_0,A)\leqslant Q_\alpha(x_0,A).$$

如果现在令 $h_n(x_0;\alpha)$ 和 $h_n(x_0;\beta)$ 如这一节的开始所写的形式，可以看到我们已经证明了如果对于所有的 x，y，有 $\beta(x,y)\leqslant\alpha(x,y)$，那么

$$h_n(x_0;\beta)\leqslant\frac{\beta(x_0)}{\alpha(x_0)}h_n(x_0;\alpha).$$

特别地，如果利用 (7.3) 中给定的准则，我们可以看到如果速率为 α 的链是常返的，那么速率为 β 的链也是常返的.

7.5 习题

7.1 证明：任何一个不可约的、离散的、两状态的马尔可夫链关于它的不变概率测度都是可逆的.

7.2 假设 X_t 是一个连续时间马尔可夫链，其状态空间是 $S=\{1,\cdots,N\}$，具有对称速率 α.

(a) 证明：对于所有的 t 和 x，

$$\mathbf{P}\{S_t = x \mid S_0 = x\} \geqslant \frac{1}{N}. \tag{7.5}$$

[提示：记

$$\mathbf{P}\{S_t = x \mid S_0 = x\} = \sum_{y\in S}\{S_{\frac{t}{2}} = y \mid S_0 = x\}^2.]$$

(b) 举例说明一个具有不变概率分布是均匀分布的非对称链，使得对于某些 $x\in S$，$t>0$，(7.5) 式不成立.

7.3 令 X_n 是一个非周期离散时间马尔可夫链，其状态空间为 $S=\{1,\cdots,N\}$，转移概率是对称的. 证明：对于所有的 $x\in S$ 和所有的整数 n，有

$$\mathbf{P}\{S_{2n} = x \mid S_0 = x\} \geqslant \frac{1}{N}.$$

如果把 $2n$ 换成 $2n+1$，上式仍成立吗?

7.4 令 X_t 是如 7.2 节例 2 所示的圆上的连续时间的简单随机游动. 证明存在一个与 N 相互独立的 $c>0$，使得对于所有的 x，$y\in\{1,\cdots,N\}$ 和所有的 $t\geqslant N^2$，有

$$\mathbf{P}\{S_t = x \mid S_0 = y\} \geqslant \frac{c}{N^2}.$$

[提示：(7.5) 会有所帮助.] 170

7.5 令 X_t 是一个非周期的马尔可夫链，状态空间为 $S=\{1,\cdots,N\}$，速率为 α 且不变概率为 π. 对每个 $0<\varepsilon<1$，令 T_ε 为对每个 x，$y\in S$ 使得如下条件成立的所有 $t>0$ 的最小值：

$$\mathbf{P}\{X_t = x \mid X_0 = y\} \geqslant \varepsilon\,\pi(x).$$

(a) 解释为什么对每个 $0<\varepsilon<1$ 有 $T_\varepsilon<\infty$.

(b) 证明：对所有的 $t>T_\varepsilon$，(7.6) 式成立.

(c) 证明：如果 $0<\varepsilon<1$ 且 k 是一个正整数，那么

$$T_{1-(1-\varepsilon)^k} \leqslant kT_\varepsilon.$$

(d) 令 X_t 是一个如 7.2 节例 2 所示的圆上的连续时间的简单随机游动. 证明存在与 N 相互独立的 c，$\beta>0$ 使得对所有的初始概率分布 v 和所有的 $t>0$，有

$$\| \mathrm{e}^{tA}v - \pi \|_{\mathrm{TV}} \leqslant c\mathrm{e} - \frac{\beta t}{N^2},$$

其中，π 表示均匀分布.

7.6 **计算机模拟.** 令 $\boldsymbol{M}$ 为按如下规则选择的一个矩阵：从任何两个 1 都不在一起且元素只为 0 和 1 的 50×50 矩阵集合中均匀地抽取（见 7.3 节）. 利用在 7.3 节描述的马尔可夫链模拟来估计这个矩阵的第 $\boldsymbol{M}(25,25)$ 个元素等于 1 的概率.

7.7 **计算机模拟.** 令 S_n 是由有限序列 $(k_0,k_1,\cdots,k_n)$ 构成的集合，其中 $k_j\in\{0,1\}$ 且任何两个 1 都不相邻，即对 $j=1,\cdots,n$，有 $k_j+k_{j-1}\leqslant 1$. 令 $p_n(j)$ 表示满足条件为 $k_j=1$ 这样的序列的比例. 做和前面的习题一样的马尔可夫链模拟来估计 $p_{200}(0)$，$p_{200}(100)$.

7.8 在本习题中，我们将精确地计算习题 7.7 中 $p_n(j)$ 的值. 令 $r_n(ij)$ 表示 S_n 中满足条件为 $k_0=i$，$k_n=j$ 的序列数目.

(a) 解释为什么

$$r_{n+1}(00)=r_n(00)+r_n(01),\quad r_{n+1}(01)=r_n(00),$$

且对于 r_{n+1} (10) 和 r_{n+1} (11) 给出相似的等式.

(b) 利用这些等式求 $r_n(00)$, $r_n(01)$, $r_n(10)$, $r_n(11)$.(提示:见习题 0.3)

(c) 求 p_n (j).

7.9 求 7.2 节例 2 中的 $N\times N$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值:

$$\mathbf{A}(i,J)=\begin{cases}-1, & i=j,\\ \frac{1}{2}, & |i-j|=1(\bmod N),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

171

[提示:特征值为 λ 的任何特征向量可以被考虑为一个整数上的函数 $f(n)$,且它满足对任意的 n,有

$$\lambda f(n)=\frac{1}{2}f(n+1)+\frac{1}{2}f(n-1)-f(n),$$
$$f(n)=f(n+N)$$

成立. 求出差分方程的通解,然后利用周期性条件对 λ 进行限制.]

7.10 令 $\alpha(x, y)$ 表示整格点集 $\mathbf{Z}^d$ 边上的对称速率函数,即一个非负的函数,它定义为对满足 $|x-y|=1$ 的 x, $y\in\mathbf{Z}^d$,有 $\alpha(x, y)=\alpha(y, x)$ 成立. 假定存在数 $0<c_1<c_2<\infty$,使得对所有满足 $|x-y|=1$ 的 x, y,

$$c_1\leqslant\alpha(x,y)\leqslant c_2.$$

令 X_t 是一个速率为 $\alpha(x, y)$ 的连续时间马尔可夫链.

(a) 如果 $d=1$, 2,证明这个链是常返的.

172

(b) 如果 $d\geqslant 3$,证明这个链是非常返的.

第8章 布朗运动

8.1 引言

布朗运动是一个刻画随机连续运动的随机过程. 为了刻画“随机连续运动”，我们首先写下我们所做的物理假定. 设 X_t 代表一个粒子在时刻 t 的位置. 这种情形下，t 在非负实数集上取值，X_t 取值为实直线（或者可能为平面或者空间）. 这是一个具有连续时间以及连续状态空间的随机过程的一个例子.

为了简便起见，我们首先假定 $X_0=0$. 下一个假定为运动是“完全随机的”. 考虑两个时刻 $s<t$. 我们并不希望称位置 X_s 与 X_t 是相互独立的，而是希望在时刻 s 以后的运动 X_t-X_s 与 X_s 独立. 我们需要对任意有限时刻做出此假定：对任意的 $s_1\leqslant t_1\leqslant s_2\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant t_n$，随机变量 $X_{t_1}-X_{s_1}$，$X_{t_2}-X_{s_2}$，…，$X_{t_n}-X_{s_n}$ 相互独立. 随机运动的分布也不应该随着时间改变. 从而，我们假定 X_t-X_s 的分布仅与 $t-s$ 有关. 这里，我们也假定过程中不存在“漂移”，即 $\mathbf{E}(X_t)=0$.

上面的假定并不能充分地描述我们所需要的模型. 事实上，若 Y_t 是柏松过程，且 $X_t=Y_t-t$ [使得 $\mathbf{E}(X_t)=0$]，X_t 满足这些假定但显然不是关于连续运动的一个模型. 作为模型的最后的假定，我们给出：函数 X_t 是关于 t 的一个连续函数.

可以证明由上述假定所描述的过程在一定比例常数范围内是唯一的. 假设过程 X_t 满足这些假定. 随机变量 X_t 的分布是什么？为简便起见，我们讨论 $t=1$ 的情形. 对任意 n，我们则可以写为

$$X_1=[X_{1/n}-X_0]+[X_{2/n}-X_{1/n}]+\cdots+[X_{n/n}-X_{(n-1)/n}].$$

也就是说，X_1 可以写成 n 个独立同分布的随机变量之和. 此外，若 n 很大，则每个随机变量很小. 更精确些，如果我们令

$$M_n=\max\{|X_{1/n}-X_0|,|X_{2/n}-X_{1/n}|,\cdots,|X_{n/n}-X_{(n-1)/n}|\},$$

173

则当 $n\to\infty$时，$M_n\to 0$. 这是由假定“X_t 为 t 的一个连续函数”所得到的一个结果（若 M_n 没有趋近于 0，则在 X_t 的路径中将会出现一个“跳”）. 由概率论的定理可知，如果变量可以写为 n 个独立同分布的随机变量之和且这 n 个随机变量的最大值趋于 0，那么它的分布是唯一的，为正态分布. 我们给出严格定义.

定义 方差参数为 σ^2 的布朗运动或维纳过程是指取值为实数的随机过程 X_t 且满足

（i） $X_0=0$；

（ii） 对任意 $s_1\leqslant t_1\leqslant s_2\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant t_n$，随机变量 $X_{t_1}-X_{s_1}$，$X_{t_2}-X_{s_2}$，…，$X_{t_n}-X_{s_n}$ 相互独立；

（iii） 对任意 $s<t$，随机变量 X_t-X_s 服从均值为 0、方差为 $(t-s)\sigma^2$ 的正态分布；

（iv） 路径是连续的，即函数 $t\to X_t$ 是一个 t 的连续函数.

尽管用常规方法可得出：定义中的增量服从正态分布，但是值得记住的是此结论实际上可

由物理假定推导得出．*标准布朗运动*（standard Brownian motion）是指满足 $\sigma^2=1$ 的布朗运动．我们也可以来看始于 x 的布朗运动；此过程满足条件（ⅱ）～（ⅳ）且初始条件为 $X_0=x$．若 X_t 是一个（始于 0 的）布朗运动，那么 $Y_t=X_t+x$ 是一个始于 x 的布朗运动．

布朗运动可通过随机游动的极限来构造．假设 S_n 为整数上的一个无偏的随机游动，我们记

$$S_n=Y_1+\cdots+Y_n,$$

其中随机变量 Y_i 相互独立，

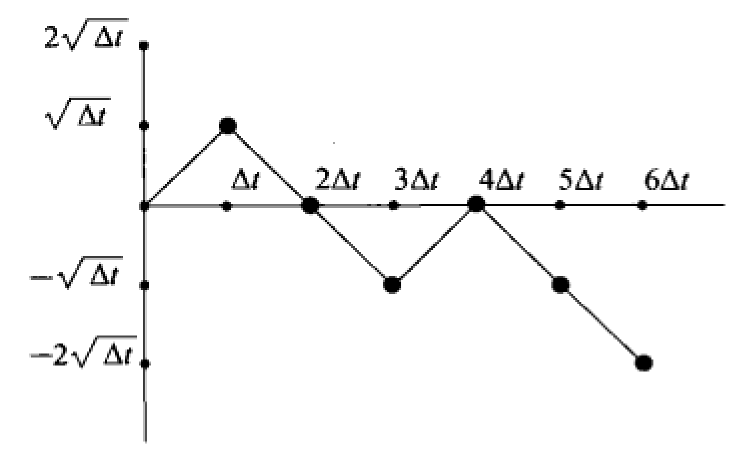
$$\mathbf{P}\{Y_i=1\}=\mathbf{P}\{Y_i=-1\}=\frac{1}{2}.$$

我们用长度为 $\Delta t=1/N$ 的增量去代替长度为 1 的时间增量，其中 N 为一整数．我们令

$$W_{k\Delta t}^{(N)}=a_N S_k,$$

这里我们选用一个正规化的常数 a_N，使得 W_1 的方差为 1．由于 $\mathrm{Var}(S_N)=N$，显然我们必须选择 $a_N=N^{-\frac{1}{2}}$．从而在这个离散逼近中，在时间 $\Delta t=\frac{1}{N}$ 中跳的长度为 $\frac{1}{N}=(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$．我们可以将离散逼近看做是 t 的所有值通过线性插值得到的一个过程（见下图）．

174



当 $N\to\infty$ 时，这个离散逼近趋近于一个连续时间连续空间的过程．由中心极限定理，

$$W_1^{(N)}=\frac{S_N}{\sqrt{N}}$$

的分布渐近服从一个均值为 0，方差为 1 的正态分布．类似地，$W_t^{(N)}$ 渐近服从一个均值为 0，方差为 t 的正态分布．该极限过程可证明是一个标准布朗运动．（这需要一些很复杂的数学知识去明确阐述这里需要采用哪种形式的极限．我们不必担心这些细节．）

一个布朗运动的路径是很粗糙的．考虑当 Δt 很小时的增量 $X_{t+\Delta t}-X_t$．这个增量的分布是均值为 0，方差为 Δt 的，因此

$$\mathbf{E}(|X_{t+\Delta t}-X_t|^2)=\Delta t.$$

换言之，一个增量的典型长度 $|X_{t+\Delta t}-X_t|$ 大约为 $\sqrt{\Delta t}$．当 $\Delta t\to 0$ 时，$\sqrt{\Delta t}\to 0$，这与路径的连续性是一致的．那么可微性呢？讨论 $\mathrm{d}X_t/\mathrm{d}t$ 是否有意义？回想一下微积分中导数的定义，

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X_{t+\Delta t}-X_t}{\Delta t}.$$

当 Δt 很小时，分子的绝对值与 $\sqrt{\Delta t}$ 同阶，而 $\sqrt{\Delta t}$ 远远大于 Δt．从而此极限不存在．通过加强此论断，可证明如下结论．

结论 布朗运动 X_t 的路径是处处不可微的.

在证明上述命题时需要细心些. 直观上很容易证明命题"对每一个 t, X_t 在 t 处不可微的概率为 1". 此命题并没有比上面表述的结论"X_t 在 t 的所有值都不可微的概率为 1"强. 它们的区别理解起来有点困难. 作为一个可能稍微简单些的例子, 考虑下面两种表述: "对每一个 t, $X_t \neq 1$ 的概率为 1", "对所有的 t 都有 $X_t \neq 1$ 的概率为 1". 这两种表述是不一样的, 事实上, 第一种是正确的, 第二种是错误的. 对于任意给定的 t, X_t 服从一个正态分布; 从而取任意特定的值的概率均为 0 (这对任意连续分布都成立). 然而, $X_1 > 1$ 的概率必然大于 0. 如果 $X_0 = 0$ 且 $X_1 > 1$, 那么 X_t 的连续性蕴含着存在 $0 < t < 1$ 使得 $X_t = 1$. 从而存在 $0 < t < 1$, 使得 $X_t = 1$ 的概率大于 0. 此处的困难源于实数是不可数这个事实. 我们可记 [175]

$$\{X_t = 1 \text{ 对某个 } 0 \leqslant t \leqslant 1\} = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{X_t = 1\}.$$

右边是集合的并, 且每个集合的概率均为 0. 然而, 它是这样集合的不可数 (uncountable) 并. 由概率论公理知概率为 0 的集合的可数并的概率为 0, 但并没有说明对不可数并仍然成立. 每当处理连续概率时都会出现这种现象. 例如, 若 Y 为任意连续随机变量, 则

$$\{-\infty < Y < \infty\} = \bigcup_{-\infty \leqslant y \leqslant \infty} \{Y = y\}.$$

右边是概率为 0 的事件的并, 但左边的概率为 1.

在具有连续时间和空间的随机过程中, 试图处理集合的不可数并时会出现很多复杂的技术问题. 我们这里忽略了大多数这样的情况. 对于布朗运动而言, 大多数这样的问题相对容易解决.

8.2 马尔可夫性

设 X_t 为一个标准布朗运动. 我们令 $\mathcal{F}_t$ 表示包含在 X_s ($s \leqslant t$) 中的信息, 也就是说, 所有的信息可以通过观察直到时刻 t 的布朗运动得到. 假设 $s < t$, 考虑条件期望 $E(X_t \mid \mathcal{F}_s)$. 注意到

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = E(X_s \mid \mathcal{F}_s) + E(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s).$$

由于 X_s 是 $\mathcal{F}_s$ 可测的, 等式右边第一项等于 X_s. 由于 $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 第二项等于 $\mathbf{E}(X_t - X_s) = 0$. 从而 [176]

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s = E(X_t \mid X_s).$$

上述左边和右边的等式阐述了布朗运动的马尔可夫性, 即给定直到时刻 s 的所有信息, 为了预测 X_t, 仅需考虑布朗运动在时刻 s 的值就足够了. 更一般地, 马尔可夫性意味着对函数 f,

$$E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E(f(X_t) \mid X_s).$$

布朗运动满足此性质. 这可以根据布朗运动的一个更强的性质得到: 若 $Y_t = X_{s+t} - X_s$, 则 Y_t 是一个独立于 $\mathcal{F}_s$ 的布朗运动. 换言之, $Z_t = X_{s+t}$ 是一个始于 (随机) 起始点 X_s 的布朗运动.

令 $p_t(x, y)$ 表示转移密度, 即始于 x 的布朗运动 X_t 的密度. 由于 $X_t - X_0$ 服从均值为 0, 方差为 t 的正态分布, 故

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(y-x)^2}{2t}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

转移密度满足查普曼-柯尔莫戈洛夫（Chapman-Kolmogorov）方程

$$p_{s+t}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_s(x,z)p_t(z,y)\mathrm{d}z.$$

此式可利用转移函数直接证明，但也可以通过马尔可夫性证明此式．由于 $Z_t=X_{s+t}$是一个始于 X_s 的布朗运动，查普曼-柯尔莫戈洛夫方程是对所有可能的起始点 z 的密度 $p_t(z, y)$ 求平均．

为了做更多的关于布朗运动的有用计算，需要一个更一般的马尔可夫性．这一般指的是强马尔可夫性．我们首先需要一个关于实值停时的概念．它的定义是离散时间过程中停时定义的推广．我们称在 [0, ∞) 上取值的一个随机变量 T 为布朗运动的一个停时（stopping time），若它满足对任意 t，事件 $\{T\leqslant t\}$（的示性函数）是关于$\mathcal{F}_t$ 可测的．也就是说，要了解过程在时刻 t 前是否停止，仅需观察直到时刻 t 的布朗运动．停时的最重要的例子形式为

$$T_x=\inf\{t: X_t=x\}.$$

若 T 是一个停时，我们记$\mathcal{F}_T$ 为直到停时 T 的布朗运动中包含的信息（观察直到时刻 T 但不超过 T 的路径）．我们令 Y_t 表示超过 T 的过程

177

$$Y_t=X_{t+T}-X_T.$$

强马尔可夫性 Y_t 是一个独立于$\mathcal{F}_T$ 的布朗运动．

容易通过运用此性质的一个例子看出它意味着什么．假设布朗运动始于 0，我们要计算存在某些 t 满足 $0\leqslant t\leqslant 1$，使得 $X_t\geqslant 1$ 的概率．令 $T=T_1$ 为布朗运动第一次等于 1 的时刻．则根据连续性，事件 $\{\exists\, 0\leqslant t\leqslant 1$，使得 $X_t\geqslant 1\}$ 与事件 $\{T\leqslant 1\}$ 是等价的．由于

$$\mathbf{P}\{\mathrm{T}=1\}\leqslant\mathbf{P}\{\mathrm{X}_1=1\}=0,$$

我们有

$$\mathbf{P}\{\mathrm{T}\leqslant 1\}=\mathbf{P}\{\mathrm{T}<1\}.$$

现在考虑事件 $\{X_1\geqslant 1\}$．由于 X_1 是服从均值为 0，方差为 1 的正态分布，

$$\mathbf{P}\{X_1\geqslant 1\}=\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

也有

$$\mathbf{P}\{X_1\geqslant 1\}=\mathbf{P}\{T\leqslant 1\}\mathbf{P}\{X_1\geqslant 1\mid T\leqslant 1\}.$$

现在我们运用强马尔可夫性．假设 $T\leqslant 1$．事实上可假定 $T<1$(由于 $T=1$ 的发生概率为 0)．则给定 T，$X_1-X_T=X_1-1$ 是一个均值为 0，方差为 $1-T$ 的正态随机变量．无论方差是多少，我们可通过正态分布的对称性得到此正态随机变量大于或等于 0 的概率为$\frac{1}{2}$．因此，我们得到

$$\mathbf{P}\{X_1-1\geqslant 0\mid T\leqslant 1\}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\mathbf{P}\{T\leqslant 1\}=2\mathbf{P}\{X_1\geqslant 1\}=2\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

此结果是反射原理的一个特例．我们现在表述可用同样的方式证明的更一般的结果．

反射原理 设 X_t 是一个始于 a 且 $a<b$，方差参数为 σ^2 的布朗运动. 则对任意 $t>0$，

$$\mathbf{P}\{X_s \geqslant b,\ 0 \leqslant s \leqslant t\} = 2\mathbf{P}\{X_t \geqslant b \mid X_0 = a\}$$
$$= 2\int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2 t} dx.$$

178

例 1 设 $t>1$，我们计算一个标准布朗运动在时刻 1 到 t 之间穿越 x 轴的概率，即

$$\mathbf{P}\{X_s = 0,\ 1 \leqslant s \leqslant t\}.$$

我们首先对时刻 $t=1$ 发生的情况取条件. 假设 $X_1=b>0$. 则 $\exists\, 1\leqslant s\leqslant t$，使得 $X_s=0$ 的概率与 $\exists\, 0\leqslant s\leqslant t-1$，使得 $X_s\leqslant -b$ 的概率一样. 它也与 $\exists\, 0\leqslant s\leqslant t-1$，使得 $X_s\geqslant b$ 的概率一样（根据对称性）. 由反射原理可得出此概率为

$$\mathbf{P}\{X_s = 0,\ 1 \leqslant s \leqslant t \mid X_1 = b\} = 2\int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-1)}} e^{-x^2/2(t-1)} dx.$$

同样，由对称性，若 $X_1=-b$，概率也是一样的. 从而，对 b 的所有可能取值求平均. 我们可得

$$\mathbf{P}\{X_s = 0,\ 1 \leqslant s \leqslant t\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(0,b)\mathbf{P}\{X_s = 0,\ 1 \leqslant s \leqslant t \mid X_1 = b\} db$$
$$= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}} \left[2\int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-1)}} e^{-x^2/(2t-1)} dx\right] db.$$

里面的积分用 $y=\frac{x}{\sqrt{t-1}}$ 作替换，积分可化简为

$$4\int_0^{\infty}\int_{b(t-1)^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(b^2+y^2)/2} dy\, db.$$

此积分可用极坐标计算. 注意到区域 $\{0<b<\infty,\ b(t-1)^{-\frac{1}{2}}<y<\infty\}$ 对应于极域 $\{0<r<\infty,\ \arctan(\sqrt{t-1})^{-1}<\theta<\frac{\pi}{2}\}$. 因此，概率等于

$$4\int_0^{\infty}\int_{\arctan((\sqrt{t-1})^{-1})}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r\, d\theta\, dr$$
$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr$$
$$= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{\sqrt{t-1}}.$$

例 2 证明（以概率 1）

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{n} = 0.$$

179

首先，考虑仅在整数时刻上取值的极限. 注意，对整数 n，

$$X_n = (X_1 - X_0) + \cdots + (X_n - X_{n-1})$$

是独立同分布的随机变量之和. 根据（强）大数定律得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0.$$

对每一个 n，令

$$M_n = \sup\{|X_t - X_n|: n \leqslant t \leqslant n+1\}.$$

如果我们可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n} = 0,$$

那么由于对每一个 t，若 $n\leqslant t\leqslant n+1$，

$$\frac{|X_t|}{t} \leqslant \frac{|X_t|}{n} \leqslant \frac{|X_n|+|M_n|}{n}.$$

因此我们可得证结论. 对任意 $a>0$，通过对称性和反射原理，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{|M_n| \geqslant a\} \leqslant 2\mathbf{P}\{M_n \geqslant a\} &= 4\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx \\ &\leqslant 4\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-xa^2/2}dx \\ &= \frac{8}{a\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}.\end{aligned}$$

如果将 $a=2(\ln n)^{\frac{1}{2}}$ 带入上式，可得

$$P\{|M_n| \geqslant 2\sqrt{\ln n}\} \leqslant \frac{8}{2\sqrt{2\pi\ln n}\,n^2}.$$

特别地，对所有充分大的 n，概率小于 n^{-2}. 若令 I_n 表示事件 $\{|M_n|\geqslant 2\sqrt{\ln n}\}$ 的示性函数，且

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n,$$

我们得到 $\mathbf{E}(I)<\infty$. 它说明了出现 $|M_n|\geqslant 2\sqrt{\ln n}$ 的时刻次数的期望值是有限的，从而，以概率 1，$|M_n|\geqslant 2\sqrt{\ln n}$ 出现有限次. 特别地，它意味着 $n^{-1}M_n\to 0$.

180

8.3 布朗运动的零集

在本节中我们将研究（随机）集合

$$Z = (t: X_t = 0).$$

可以证明这个集合是实直线上的一个有趣的“分形”子集.

在分析这个集合时，我们将运用布朗运动的两个重要的刻度结论，它们的证明留作习题（见习题 8.7 和习题 8.8）.

刻度性质 假设 X_t 是一个标准布朗运动. 则

(1) 若 $a>0$，$Y_t=a^{-\frac{1}{2}}X_{at}$，那么 Y_t 是一个标准布朗运动.

(2) 如果 X_t 是一个标准布朗运动且 $Y_t=tX_{\frac{1}{t}}$，那么 Y_t 是一个标准布朗运动.

在上一节的一个例子中，我们已证明

$$\mathbf{P}\{Z \cap [1,t] \neq \varnothing\} = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan \frac{1}{\sqrt{t-1}}.$$

当 $t \to \infty$ 时，右边的值趋近于 1. 这告诉我们以概率 1 布朗运动最终返回到原点，从而（由强马尔可夫性）它将无限多次返回. 这意味着当 t 很大时，布朗运动可取正值和负值.

在 $t=0$ 附近会发生什么情况？令 $Y_t = tX_{\frac{1}{t}}$. 则 Y_t 也是一个标准布朗运动. 在过程 X 中当时刻趋于无穷大时，在过程 Y 中的时刻趋于 0. 从而，由于 X_t 在 t 取任意大值时都有正值和负值，所以 Y_t 在 t 任意小时可取正值和负值. 这表明在任意趋于 0 的时间间隔内布朗运动都可取正值和负值（从而由连续性也可为 0).

Z 满足的一个拓扑学性质为 Z 是一个闭集. 这意味着若一个序列点集 $t_i \in Z$ 且 $t_i \to t$，则 $t \in Z$. 这可以根据函数 X_t 的连续性得到. 对任意连续函数，如果 $t_i \to t$，那么 $X_{t_i} \to X_t$. 我们已知 0 不是 Z 的一个孤立点，即存在正数 $t_i \in \mathbf{Z}$，使得 $t_i \to 0$. 可证明 Z 中不包含孤立点. 从拓扑学的观点看，Z 看起来像康托尔（Cantor）集（见下面例子中的定义).

集合 Z 有多“大”？要想讨论这一点我们需要讨论一个集合的维数的概念. 有两个相似的维数概念，豪斯多夫（Hausdorff）维数和 box 维数，它们可以定义集合的分形维数.（“分形维数”经常在科技文献中使用. 通常情况下使用此说法的人不区分豪斯多夫维数和 box 维数，可能意味着其中的任意一个). 这里讨论的维数概念是 box 维数，但我们讨论的所有集合的豪斯多夫维数等于它们的 box 维数. 假设有一个 d 维空间 $\mathbf{R}^d$ 上的有界集合 A. 假设用直径为 ϵ 的 d 维球去覆盖 A. 我们需要多少个这样的球？如果 A 是一个长度为 1 的线段（一维集合)，则需要 ϵ^{-1} 个这样的球. 如果 A 是一个二维的正方形，那么需要与 ϵ^{-2} 同阶个这样的球. 可以看出对一个标准的 k 维集合，我们需要 ϵ^{-k} 个这样的球. 这引导我们定义集合 A 的（box）维数为 D，使得对任意小的 ϵ，需要直径为 ϵ 的球去覆盖 A 的数量与 ϵ^{-D} 同阶. [181]

例 考虑 [0, 1] 上的分形子集——康托尔集. 康托尔集 A 可以定义为渐近康托尔集 A_n 的一个极限. 我们以 $A_0=[0,1]$ 开始. 下一个集合 A_1 可由 A_0 去掉中间的开集 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 得到，因此

$$A_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right].$$

第二个集合 A_2 可由 A_1 中的两个区间分别去掉它们的中间的三等分区间得到，从而

$$A_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right].$$

一般地，A_{n+1} 可由 A_n 中的每个区间都三等分，并去掉“中间的三等分”区间得到. 康托尔集 A 是这些集合 A_n 的极限，

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

A_0

A_1

A_2

A_3

182 注意到 A_n 中包含 2^n 个长度为 3^{-n} 的区间．假设我们尝试用长度为 3^{-n} 的区间去覆盖 A，

$$\left[\frac{k-1}{3^n},\frac{k}{3^n}\right].$$

我们需要 2^n 个这样的区间．从而康托尔集的维数 D 是满足 $2^n=(3^{-n})^{-D}$ 的数，即

$$D=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0.631.$$

现在考虑集合 Z 和 $Z_1=Z\cap[0,1]$．我们尝试用直径（长度）为 $\epsilon=\frac{1}{n}$ 的一维球（即区间）去覆盖 Z_1．为简便起见，我们考虑 n 个区间

$$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right],\quad k=1,2,\cdots,n.$$

需要多少个这样的区间去覆盖 Z_1？如果 $Z_1\cap[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\neq\varnothing$，那么需要这样的一个区间．

$$P(k,n)=\mathbf{P}\left\{Z_1\cap\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\neq\varnothing\right\}$$

是多少？假定 $k\geqslant 1$（如果 $k=0$，因为 $0\in\mathbf{Z}$，则概率为 1）．运用布朗运动的刻度性质知，$Y_t=\left(\frac{(k-1)}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}X_{\frac{nt}{(k-1)}}$ 是标准布朗运动．从而

$$P(k,n)=\mathbf{P}\left\{Y_t=0\ ,1\leqslant t\leqslant\frac{k}{k-1}\right\}.$$

这个概率在上节中已计算出，

$$P(k,n)=1-\frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{k-1}.$$

所以，需要覆盖 Z_1 的区间数的期望看起来像

$$\sum_{k=1}^{n}P(k,n)=\sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{k-1}\right].$$

为了估计这个和，我们需要考虑 $\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ 在 0 处的泰勒级数（需要回想一下 arctan 的导数），

$$\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}-t+O(t^2).$$

换言之，当 x 很大时，

183

$$\arctan x\approx\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}P(k,n)\approx 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{\pi\sqrt{k-1}}\approx\frac{2}{\pi}\int_1^n(x-1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\approx\frac{4}{\pi}\sqrt{n}.$$

因此需要与 $\sqrt{n}$ 同阶个长度为 $\frac{1}{n}$ 的区间覆盖 Z_1，也就是说

结论 零集 Z 的分形维数为 $\frac{1}{2}$.

8.4 多维布朗运动

假定 X_t^1，…，X_t^d 是相互独立的（一维）标准布朗运动．我们称向量值随机过程

$$X_t = (X_t^1, \cdots, X_t^d)$$

是一个标准的 d 维布朗运动．也就是说，一个 d 维布朗运动是在每一维上都是一个布朗运动并且每一维上的布朗运动是相互独立的过程．

不难证明上述定义的 X_t 满足下面的性质：

（ⅰ）$X_0=0$；

（ⅱ）对任意 $s_1 \leqslant t_1 \leqslant s_2 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant t_n$，（向量值）随机变量 $X_{t_1}-X_{s_1}$，$X_{t_2}-X_{s_2}$，…，$X_{t_n}-X_{s_n}$ 相互独立；

（ⅲ）随机变量 X_t-X_s 服从均值为 0、协方差矩阵为 $(t-s)\boldsymbol{I}$ 的联合正态分布，即密度 $f(x_1, \cdots, x_d)$ 等于

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}e^{-x_1^2/2r}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}e^{-x_d^2/2r}\right) = \frac{1}{(2\pi r)^{d/2}}e^{-|x|^2/2r},$$

其中 $r=t-s$.

（ⅳ）X_t 是一个 t 的连续函数．

可以用（ⅰ）到（ⅳ）作为 X_t 的定义，但是我们很快发现可以采用 d 个独立的一维布朗运动来构造 X_t．类似一维情形，我们令 $p_t(x, y)$，x，$y \in \mathbf{R}^d$ 表示假定 $X_0=x$ 时 X_t 的概率密度（从这可以明显地看出怎样定义一个始于 $\mathbf{R}^d$ 中任意点的布朗运动），

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)\ d/2}e^{-|y-x|^2/2t}.$$

同样，此密度满足查普曼-柯尔莫戈洛夫方程

$$p_{s+t}(x,y) = \int_{\mathbf{R}^d} p_s(x,z)p_t(z,y)\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_d.$$

184

布朗运动和扩散定理是紧密相连的．假定有按密度 $f(y)$ 分布在 $\mathbf{R}^d$ 中的大量粒子．令 $f(t, y)$ 表示粒子在时刻 t 的密度（因此 $f(0, y)=f(y)$）．如果我们假定粒子做标准布朗运动，且相互独立，那么可写出在时刻 t 时粒子的密度．如果一个粒子始于位置 x，那么它在时刻 t 时位置的概率密度为 $p_t(x, y)$．通过积分，我们得到

$$f(t,y) = \int_{R^d} f(x)p_t(x,y)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d.$$

布朗运动的对称性告诉我们 $p_t(x, y) = p_t(y, x)$．从而，我们可将右边的表达式写为

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)p_t(y,x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d.$$

右式代表假定 $X_0=y$ 时 $f(X_t)$ 的期望值．我们可写为

$$f(t,y) = \mathbf{E}^y[f(X_t)].$$

符号 $\mathbf{E}^y$ 用来表示假定 $X_0=y$ 时 X_t 的期望．

我们现在推导 $f(t, x)$ 满足的一个微分方程．考虑 $\partial f/\partial t$；为简便起见，取 $t=0$，$d=1$.

如果 f 充分好，我们可写出 f 关于 x 的泰勒级数，

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2+o((y-x)^2),$$

其中 $o(\cdot)$ 表示当 $y\to x$ 时满足 $o((y-x)^2)/(y-x)^2\to 0$ 的误差项. 因此

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}^x[f(X_t)-f(X_0)]\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f'(x)\mathbf{E}^x[X_t-x]\\&\quad+\frac{1}{2}f''(x)\mathbf{E}^x[(X_t-x)^2]+o((X_t-x)^2)].\end{aligned}$$

我们知道 $\mathbf{E}^x[X_t-x]=0$ 和 $\mathbf{E}^x[(X_t-x)^2]=\mathrm{Var}(X_t)=t$. 同时因为 $(X_t-x)^2$ 与 t 同阶，$t^{-1}o(\cdot)$ 项趋近于 0. 从而，我们得到

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}f''(x).$$

对所有的 t 有同样的结论成立：

185

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

同样，我们可将此结论扩展到 d 维空间中并且证明 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta f,$$

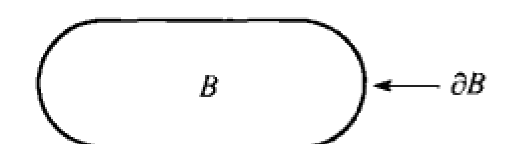
其中 Δ 表示拉普拉斯（Laplace）算子，

$$\Delta f(t,x_1,\cdots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

这个方程通常称为*热方程*（heat equation）. 通过考虑方差参数为 $\sigma^2=D$ 的布朗运动，可以求解带有扩散常数 D 的热方程有类似解，

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{D}{2}\Delta f,$$

有时考虑有界域的热方程更有用. 令 B 为 $\mathbf{R}^d$ 中的一个有界域，边界为 ∂B.



考虑 B 上的一个初始热分布为给定的 $f(x)$，$x\in B$. 假设边界上的温度也是固定的，即存在一个函数 $g(y)$，$y\in\partial B$，表示点 y 的固定温度. 如果 $u(t,x)$ 代表的是 x 在时刻 t 的温度，则 $u(t,x)$ 满足

$$\text{(i)}\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{D}{2}\Delta u,\quad x\in B,$$

$$\text{(ii)}\ u(t,x)=g(x),\quad x\in\partial B,$$

$$\text{(iii)}\ u(0,x)=f(x),\quad x\in B.$$

（i）到（iii）的解可以用布朗运动的形式表示. 令 X_t 是一个方差参数为 $\sigma^2=D$ 的 d 维布朗运动. 令 $\tau=\tau_{\partial B}$ 为布朗运动首次击中边界 ∂B 的时刻，

$$\tau = \inf\{t : X_t \in \partial B\}.$$ 186

则解可写为

$$u(t,x) = \mathbf{E}^x[f(X_t)I\{\tau > t\} + g(X_\tau)I\{\tau \leqslant t\}].$$

换言之，在时刻 t 取下述平均值：对路径而言，$f(X_t)$ 没有击中 ∂B 而 $g(X_\tau)$ 击中了 ∂B. 当 $t\to\infty$ 时，温度渐近于一个具有边界值 $g(x)$ 的平稳分布 $v(x)$. 稳定状态的解满足

$$(\text{i})\ \Delta v(x) = 0, \quad x \in B,$$

$$(\text{ii})\ v(x) = g(x), \quad x \in \partial B,$$

则解为

$$v(x) = \lim_{t\to\infty} u(t,x) = \mathbf{E}^x[g(X_\tau)]$$

例 1 设 $d=1$ 且假设 $B=(a, b)$，$0\leqslant a<b<\infty$. 则 $\partial B=\{a, b\}$. 取 $a<x<b$，考虑

$$\tau = \inf\{t : X_t = a \text{ 或 } b\},$$

其中 X_t 是一个标准布朗运动. 令 g 为 ∂B 上的函数，$g(a)=0$，$g(b)=1$. 则

$$v(x) = \mathbf{E}^x[g(X_\tau) = \mathbf{P}^x\{X_\tau = b\}$$

(这里我们用 $\mathbf{P}^x$ 表示假定 $X_0=x$ 下的概率). 由上述讨论可知 $v(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad a < x < b,$$

$$v(a) = 0, \quad v(b) = 1.$$

容易求解此微分方程，我们得到

$$v(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

这是类似赌徒输光估计的布朗运动.

例 2 设 $d=1$ 且假设 $B=(0, \pi)$，$X_0=y\in(0, \pi)$. 令 $u(t, x)$ 为热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$$ 187

的解，且边界条件为 $u(t, 0)=u(t, \pi)=0$，使得当 $t\to 0$ 时，$u(t, x)$ 渐近于 y 的“δ 函数”. 则 $u(t, x)$，$0<x<\pi$ 也是表示限制在没有离开 $(0, \pi)$ 的布朗运动的密度. 函数 u 可以利用分离变量的方法明确地求出. 首先，容易验证对所有的整数 n，函数 $\mathrm{e}^{-tn^2/2}\sin(nx)$ 满足热方程而且在边界上等于 0. 从而，对任意常数 C_n，函数

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-tn^2/2}\sin(nx)$$

满足热方程和边界条件. 如果想使得 $u(0, x)=f(x)$，则需要选择常数使得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx).$$

由于

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x = 0 \quad , \quad n \neq m,$$

我们可以看到 C_n 必须满足

$$\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = C_n\int_0^\pi \sin^2(nx)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}C_n.$$

在这种情形下，f 是在 y 处的 δ 函数，我们选择

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sin(ny).$$

从而

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-tn^2/2}\sin(ny)\sin(nx),$$

当 $t\to\infty$时，

$$u(t,x) \sim \frac{2}{\pi}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin y \sin x.$$

例 3 如果 $d\geqslant 1$，$D=1$，$g\equiv 0$，则读者可以尝试写出热方程的解的形式为

188

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\ \mathrm{e}^{-\lambda_n t/2}\phi_n(x),$$

其中函数 ϕ_n 为 Δ 的特征函数（eigenfunction），其特征值为 $-\lambda_n$，且满足狄利克雷边界条件，即

$$\Delta\phi_n(x) = -\lambda_n\phi_n(x), x\in B \quad \phi(x) = 0, x\in\partial B.$$

为此，我们需要求解满足条件的正交特征函数的集合，

$$\int_B \phi_n(x)\phi_m(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d = 0,\quad n\neq m,$$

而且是完备的，即每个 f 可写为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\phi_n(x).$$

对于一些区域，例如 $\mathbf{R}^d$ 中的球，特征函数和特征值是已知的. 对于更为广泛的区域类，读者可证明这样函数的集合是存在的. 可参考偏微分方程的书籍获得更多的信息. 如果 B 是一个有界连通区域，可以选择对应于最大特征值 $-\lambda_1$（绝对值最小的特征值）的特征函数 ϕ_1，使得如果 $X_0=y$，密度函数 $u(t,\ x)$ 满足

$$u(t,x) \sim \mathrm{e}^{-\lambda_1 t/2}\ \phi_1(y)\ \phi_1(x),\quad t\to\infty.$$

在之前的例子中，$\lambda_1=1$，$\phi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$.

8.5 常返和非常返

在这一节中我们想要知道布朗运动是否能持续地返回到原点. 对于一维布朗运动，我们已经回答了这个问题；如果 X_t 是一个标准的（一维）布朗运动，那么 X_t 是常返的，即存在任意大时刻 t 使得 $X_t=0$.

现在假设 X_t 是一个标准的 d 维布朗运动. 设 $0<R_1<R_2<\infty$ 且令 $B=B(R_1,\ R_2)$ 为圆环域

$$B = \{x\in\mathbf{R}^d : R_1 < |x| < R_2\},$$

且边界为

189

$$\partial B = \{x\in\mathbf{R}^d : |x| = R_1 \text{或} r|x| < R_2\},$$

假设 $x\in B$. 令 $f(x)=f(x, R_1, R_2)$ 为始于 x 的一个标准布朗运动在击中球面 $\{y:|y|=R_1\}$ 之前击中球面 $\{y:|y|=R_2\}$ 的概率. 如果令

$$\tau=\tau_{\partial B}=\inf\{t: X_t\in\partial B\},$$

则可写为

$$f(x)=\mathbf{E}^x[g(X_\tau)]$$

其中当 $|y|=R_2$ 时 $g(y)=1$, 当 $|y|=R_1$ 时 $g(y)=0$. 在上一节中我们已知 f 为满足

$$(\mathrm{i})\ \Delta f(x)=0,\quad x\in B,$$

$$(\mathrm{ii})\ f(y)=0,\quad |y|=R_1;\quad f(y)=1,\quad |y|=R_2$$

的函数. 为了求解 f, 我们首先注意到布朗运动的对称性蕴涵对某些 ϕ 有 $f(x)=\phi(|x|)$, 即 f 的值仅依赖于 x 的绝对值. 我们可将方程 (i) 写成球坐标的形式. 拉普拉斯算子 Δ 在球坐标下的形式有一些复杂; 然而, 对仅依赖于半径的 $\phi(r)$ 来说并不是很复杂. 可验证

$$\Delta\phi(r)=\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2}+\frac{d-1}{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}.$$

方程

$$\phi''(r)+\frac{d-1}{r}\phi'(r)=0$$

的通解为

$$\phi(r)=\begin{cases}c_1\ln r+c_2, & d=2,\\ c_1r^{2-d}+c_2, & d\geqslant 3.\end{cases}$$

[$\phi(r)$ 的二阶方程为 $\psi(r)=\phi'(r)$ 的一阶方程, 可通过分离变量的方法求解.] 加入边界条件 $\phi(R_1)=0$ 和 $\phi(R_2)=1$, 我们可得

$$f(x)=\phi(|x|)=\frac{\ln|x|-\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1},\quad d=2,$$

[190]

$$f(x)=\phi(|x|)=\frac{R_1^{2-d}-|x|^{2-d}}{R_1^{2-d}-R_2^{2-d}},\quad d\geqslant 3.$$

现在考虑二维情形. 设 $x\in\mathbf{R}^2$, 假定有始于 x 的一个布朗运动 (或者布朗运动在某时刻 t 处在 x). 取任意 $\varepsilon>0$, 思考: 布朗运动从不返回到以 0 为中心半径为 ε 的圆盘的概率是多少? 上述命题给出在到达圆盘之前到达半径为 R_2 的圆的概率. 从而, 我们感兴趣的概率为

$$\lim_{R_2\to\infty}\mathbf{P}^x\{|X_t|=R_2\text{ 在 }|X_t|=\varepsilon\text{ 之前}\}=\lim_{R_2\to\infty}\frac{\ln|x|-\ln\varepsilon}{\ln R_2-\ln\varepsilon}=0.$$

因此, 以概率 1 布朗运动经常返回到半径为 ε 的圆盘, 所以, 它无限多次返回且在任意大时刻. 它是否曾经返回到点 0, 即是否存在时刻 t 使得 $X_t=0$? 同样, 游动始于 $x\neq 0$. 如果存在一个正的概率返回到 0, 则必然存在一个 R_2 使得在到达半径为 R_2 的圆之前到达 0 的概率为正. 但后面的概率可写为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{P}^x\{|X_t|=\varepsilon\text{ 在 }|X_t|=R_2\text{ 之前}\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[1-\frac{\ln|x|-\ln\varepsilon}{\ln R_2-\ln\varepsilon}\right]=0.$$

从而实际上布朗运动从来没有返回到0. 总之，在二维情形中，布朗运动可以返回到任意接近0的位置无限多次，但从来没有返回到0. 我们称在二维情形中布朗运动是*邻域常返*（neighborhood recurrent）的，而不是*点常返*（point recurrent）的.

现在考虑 $d\geqslant 3$. 同样我们取 $\varepsilon>0$ 并且思考始于 x 的布朗运动从不返回到半径为 ε 的球的概率是多少. 如果 $|x|>\varepsilon$，可得此概率为

$$\lim_{R_2\to\infty}\frac{\varepsilon^{2-d}-|x|^{2-d}}{\varepsilon^{2-d}-R_2^{2-d}}=1-\left(\frac{\varepsilon}{|x|}\right)^{d-2}<1.$$

因为概率小于1，我们可知布朗运动最终会远离任意以原点为中心的球，从而达到无穷大. 我们称在这种情形下的布朗运动是*非常返的*.

8.6 布朗运动的分形性质

设 X_t 是一个标准的 d 维布朗运动，令 A 表示路径访问到的（随机）点集，

191

$$A=\{x\in\mathbf{R}^d: X_t=x\text{ ,对某个 }t\}.$$

本节中将考虑当 $d\geqslant 2$ 时集合 A 的维数.

为了考虑一个有界集，令 $A_1=A\cap\{x:|x|\leqslant 1\}$. 固定一 ε，我们尝试使用直径为 ε 的球去覆盖 A_1. 首先考虑半径为1的整个球 $\{x:|x|\leqslant 1\}$，使用直径为 ε 的球去覆盖它. 需要这样的球的数量与 ε^{-d} 同阶.（这与球为一个 d 维集合的事实一致.）需要多少个这样的球去覆盖 A_1？

首先考虑 $d=2$. 由前一节得出的结论，布朗运动可访问每一个开球. 从而 A 和每一个球都相交，所有的球都需要. 因此 A 的维数为2.

现在考虑 $d>2$. 取一个直径为 ε 的典型的球. 需要它覆盖的概率是多少，即布朗运动访问该球的概率为多少？由前一节所作的计算知，以点 x 为中心半径为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的球 $\left(|x|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 被访问到的概率为 $\left(\frac{\varepsilon}{2|x|}\right)^{d-2}$. 从而，若 ε 很小且 $|x|$ 阶为1，概率大约为常数次 ε^{d-2}. 由于大约 ε^{-d} 个球中每个球被抽中覆盖的概率大约为 ε^{d-2}，那么一共需要的球大约是 $\varepsilon^{d-2}\varepsilon^{-d}=\varepsilon^{-2}$ 个. 因此集合 A 的维数为2. 我们仅简要地阐述了下面结论的思路.

结论 *一个 d 维布朗运动（$d\geqslant 2$）的路径的分形维数为2.*

8.7 比例原则

布朗运动的分形性质与比例原则紧密相连：如果 X_t 是一个标准布朗运动且 $b>0$，那么 $Y_t=b^{-\frac{1}{2}}X_{bt}$ 也是一个标准布朗运动. 满足引言部分讨论的性质的过程一定满足此比例原则. 假设放弃 X_t 是 t 的连续函数这一条件. 我们能否得到不同的比例原则？是否存在一个过程关于0对称且满足其他条件，即它有一个不同的刻度指数 λ，通过这意味着 $Y_t=b^{-\lambda}X_{bt}$ 的分布与 X_t 一样？

192

假设存在这样的过程且刻度指数为 λ. 若我们假定 X_t 有有限方差，那么 λ 一定等于 $\frac{1}{2}$.

这可由简单计算

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}[X_{\frac{1}{n}} + (X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}}) + \cdots + (X_{\frac{n}{n}} - X_{\frac{(n-1)}{n}})]$$
$$= n\mathrm{Var}(X_{\frac{1}{n}}) = n\mathrm{Var}(n^{-\lambda}X_1) = n^{1-2\lambda}\mathrm{Var}(X_1)$$

得出，即意味着 $\lambda=\frac{1}{2}$.

令

$$M_n = \max\{|X_{\frac{1}{n}}|, |X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}}|, \cdots, |X_{\frac{n}{n}} - X_{\frac{(n-1)}{n}}|\}.$$

如果路径中带有跃变，那么我们希望对某些 ε，当 $n\to\infty$时 $\mathbf{P}\{M_n\geqslant\varepsilon\}$ 不会趋向于0. 然而，我们假定的路径不是难以控制的，我们希望对某些 K，$\mathbf{P}\{M_n\geqslant K\}$ 大概小于（比如）$\frac{1}{2}$. 注意到

$$\mathbf{P}\{M_n \leqslant r\} = \mathbf{P}\{|X_{\frac{j}{n}} - X_{\frac{(j-1)}{n}}| \leqslant r, j = 1,\cdots,n\}$$
$$= \mathbf{P}\{|X_{\frac{1}{n}} \leqslant r\}^n$$
$$= \mathbf{P}\{n^{-\lambda}| |X_1| \leqslant r\}^n = P\{|X_1| \leqslant rn^{\lambda}\}^n.$$

如果我们回想到 $(1-\frac{a}{n})^n\to e^{-a}$，那么可得到 X_1 的一个很好的候选分布为一个满足 $\mathbf{P}\{|X_1|>n^{\lambda}\}\sim cn^{-1}$，或者

$$\mathbf{P}\{|X_1| \geqslant y\} \sim cy^{-\frac{1}{\lambda}}$$

的分布. 若 $\lambda<\frac{1}{2}$，则不难验证这样的 X_1 具有有限的方差. 但此意味着 $\lambda=\frac{1}{2}$. 从而没有满足 $\lambda<\frac{1}{2}$的例子. 当 $\lambda>\frac{1}{2}$时，存在这样的例子且称为*对称稳定分布*（symmetric stable distribution），相应的过程为*对称稳定过程*（symmetric stable process）. 除了 $\lambda=1$ 的情形外不能明确地写出这些过程的密度，$\lambda=1$ 时为柯西（Cauchy）分布，且密度为

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < \infty.$$

8.8 带漂移的布朗运动

考虑一个始于 $x\in\mathbf{R}^d$ 的 d 维布朗运动 X_t，其方差参数为 σ^2. 令 $\mu\in\mathbf{R}^d$ 且

$$Y_t = X_t + t\mu.$$

则称 Y_t 为始于 x 方差参数为 σ^2 且具有漂移 μ 的 d 维布朗运动. 读者可以很容易地验证 Y_t 满足

(ⅰ) $Y_0=x$；

(ⅱ) 若 $s_1\leqslant t_1\leqslant s_2\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant t_n$，则 $Y_{t_1}-Y_{s_1}$，…，$Y_{t_n}-Y_{s_n}$是相互独立的；

(ⅲ) Y_t-Y_s 服从均值为 $\mu(t-s)$ 且协方差阵为 $\sigma^2(t-s)\boldsymbol{I}$ 的正态分布；

(ⅳ) Y_t 是 t 的连续函数.

193

Y_t 运动构成方向 μ 上的一个“直线”运动，且伴随随机波动. 注意到 $\mathbf{E}(Y_t)=t\mu$.

给定 $Y_0=x$ 的情况下，Y_t 的密度 $p_t(x, y)$ 很容易看出为

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2 t)^{d/2}} e^{-|y-x-t\mu|^2/2t\sigma^2}.$$

此密度满足查普曼一柯莫戈洛夫方程，

$$P_{s+t}(x,y) = \int_{\mathbf{R}^d} p_s(x,z) p_t(z,y) dz_1 \cdots dz_d.$$

假设我们从 $\mathbf{R}^d$ 上的一个密度 $f(x)$ 开始. 考虑函数

$$f(t,x) = \mathbf{E}^x[f(Y_t)].$$

为了简单起见，我们将考虑 $d=1$，$t=0$ 的情形. 还是将 f 在 x 处进行泰勒级数展开，

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2} f''(x)(y-x)^2 + o((y-x)^2).$$

因此，

$$\mathbf{E}^x[f(Y_t)] = f(x) + f'(x)\mathbf{E}^x[Y_t - x] + \frac{1}{2} f''(x)\mathbf{E}^x[(Y_t - x)^2] + o(\mathbf{E}(Y_t - x)^2).$$

一个始于 x 方差参数为 σ^2 且具有漂移 μ 的布朗运动可以通过令 $Y_t=X_t+t\mu+x$ 得到，其中 X_t 是从 0 开始的方差为 σ^2 的（零漂移）布朗运动. 所以，

$$\mathbf{E}^x[Y_t - x] = \mathbf{E}[X_t + t\mu] = t\mu,$$

$$\mathbf{E}^x[(Y_t - x)^2] = \mathbf{E}[(X_t + t\mu)^2] = \mathbf{E}[(X_t + t\mu)]^2 + \mathrm{Var}(X_t + t\mu) = (t\mu)^2 + \sigma^2 t.$$

同样，由于 $(Y_t-x)^2$ 与 t 同阶，从而 $o((Y_t-x)^2)$ 为 $o(t)$. 因此，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{E}^x[f(Y_t)] - \mathbf{E}^x[f(Y_0)]}{t} = \mu f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x).$$

我们看到在漂移情况下增加了关于 x 的一阶导数.

在 d 维情况下，若漂移 $\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_d)$，我们可以得到

194

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{d} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta f.$$

8.9 习题

8.1 设 X 为正态随机变量，且均值为 0 方差为 1. 证明：若 $a>0$，则

$$\mathrm{P}\{X \geqslant a\} \leqslant \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

[提示：

$$\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leqslant \int_a^{\infty} e^{-\frac{ax}{2}} dx.]$$

8.2 设 $X_{n1}, \cdots, X_{nn}$ 是均值为 0 方差为 $\frac{1}{n}$ 的独立正态随机变量. 则

$$X = X_{n1} + \cdots + X_{nn}$$

是均值为 0 方差为 1 的正态随机变量. 令

$$M_n = \max\{|X_{n1}|, \cdots, |X_{nn}|\}.$$

证明：对任意 $\epsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{M_n > \varepsilon\} = 0.$$

（提示：利用问题 8.1 的估计会很有用．记住“若 Y 是均值为 0 方差为 σ^2 的正态随机变量，则 $\sigma^{-1}Y$ 是均值为 0 方差为 1 的正态随机变量”这一结论也是很有帮助的．）

8.3 设 $X_{n1},\cdots,X_{nn}$ 是均值为$\frac{1}{n}$的独立泊松随机变量，则

$$X = X_{n1} + \cdots + X_{nn}$$

是均值为 1 的泊松随机变量．令

$$M_n = \max\{X_{n1},\cdots,X_{nn}\}.$$

求

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{M_n > \frac{1}{2}\right\}.$$

8.4 设 X_t 为一个标准（一维）布朗运动．求下列概率．以有理数或者保留至少 3 位小数的形式给出结果．

195

(a) $X_2>2$

(b) $X_2>X_1$

(c) $X_2>X_1>X_3$

(d) 存在 t 满足 $2\leqslant t\leqslant 3$，使得 $X_t=0$

(e) 对所有满足 $0<t<3$ 的 t 使得 $X_t<4$

(f) 对所有的 $t>10$ 使得 $X_t>0$.

8.5 随机变量 $Y_1,\cdots,Y_n$ 的联合正态分布的均值为 0，如果存在相互独立的随机变量 $X_1,\cdots,X_n$，其中每一个变量的均值为 0，方差为 1，且有常数 a_{ij} 使得

$$Y_i = a_{i1}X_1 + \cdots + a_{in}X_n,$$

设 X_t 为一个标准布朗运动．令 $s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n$．解释为什么根据布朗运动的定义可以得出 $X_{s_1},\cdots,X_{s_n}$ 具有联合正态分布．

8.6 若随机变量 $Y_1,\cdots,Y_n$ 的联合正态分布的均值为 0，那么方差矩阵为矩阵 Γ，它的 $(i,\ j)$ 位置上的元素为 $\mathbf{E}(Y_iY_j)$．设 X_t 和 $s_1,\cdots,s_n$ 如习题 8.5.

(a) 求 $X_{s_1},\cdots,X_{s_n}$ 的方差矩阵 Γ.

(b) $Y_1,\cdots,Y_n$ 的矩母函数（mgf）f：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 的定义为

$$f(t_1,\cdots,t_n) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{t_1Y_1+\cdots+t_nY_n}].$$

根据 $Y_1,\cdots,Y_n$ 的方差矩阵求它的 mgf.

(c) 如果两个分布具有相同的 mgf，那么这两个分布是相同的．利用此结论证明：如果 $Y_1,\cdots,Y_n$ 有均值为 0 的联合正态分布，且对所有的 $i\neq j$ 有 $\mathbf{E}(Y_iY_j)=0$，那么 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是相互独立的．

8.7 假设 X_t 为一个标准布朗运动且 $Y_t=a^{-\frac{1}{2}}X_{at}$，其中 $a>0$．证明 Y_t 是一个标准布朗运动．

8.8 假设 X_t 为一个标准布朗运动且 $Y_t=tX_{\frac{1}{t}}$．证明 Y_t 是一个标准布朗运动．（提示：习题 8.6（c）可能会有用．）

8.9 假设 X_t 为一个标准布朗运动．计算下面的条件概率：

$$\mathbf{P}\{X_2 > 0\mid X_1 > 0\}.$$

196

事件 $\{X_1>0\}$ 和 $\{X_2>0\}$ 是独立的吗?

8.10 设 X_t 和 Y_t 是独立的标准（一维）布朗运动.

(a) 证明 $Z_t=X_t-Y_t$ 是一个标准布朗运动. Z_t 的方差参数是什么?

(b) 判断正误：以概率 1，对于无穷多 t 值满足 $X_t=Y_t$.

8.11 设 X_t 是一个始于 0 的标准（一维）布朗运动，并令

$$M=\max\{X_t:0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

求 M 的密度并计算它的期望和方差.

8.12 设 X_t 是一个始于 0 的标准（一维）布朗运动，并令

$$T=\min\{t:|X_t|=1\},\tilde{T}=\min\{t:X_t=1\}.$$

(a) 证明：存在正的常数 c，β，使得对所有 $t>0$，

$$\mathbf{P}\{T>t\}\leqslant c\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

推导 $\mathbf{E}(T)<\infty$.

(b) 利用反射原理求 $\tilde{T}$ 的密度，并证明 $\mathbf{E}(\tilde{T})=\infty$.

8.13 设 X_t，T 如习题 8.12，并令

$$T^*=\min\{t:X_t=1 \text{ 或 } X_t=-3\}.$$

(a) 解释为什么 X_T 和 T 是独立的随机变量.

(b) 证明 T^* 和 X_{T^*} 不是独立的.

8.14 设 X_t 是一个标准（一维）布朗运动，从区间 $(0,1)$ 均匀地选择起始点 y. 假设一旦运动到 0 或者 1，运动便停止，令 $u(t,x)$，$0<x<1$ 表示限制在那些没有离开 $(0,1)$ 的路径的位置 X_t 的密度. 用一个无穷级数明确写出解 $u(t,x)$，并利用此级数求函数 h 和常数 β，使得当 $t\to\infty$ 时，

$$u(t,x)\sim \mathrm{e}^{-\beta t}h(x).$$

8.15 类似康托尔集的集合 A 定义如下. 设 $A_0=[0,1]$,

197

$$A_1=\left[0,\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{3}{5},1\right],$$

且 A_n 可这样得到：将 A_{n-1} 中的每个区间都 5 等分，将中间的那段区间去掉. 令

$$A=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n,$$

A 的分形维数是多少?

8.16 假设 X 服从柯西分布，即密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<\infty.$$

(a) 如果 $a>0$，令 $Y=a^{-1}X$. Y 的密度是什么?

(b) 假设 Y，Z 是独立的随机变量，且每个都服从柯西分布. 证明：平均值$\frac{(Y+Z)}{2}$也服从柯西分布.

(c) 当 $r>0$ 取何值时使得 $\mathbf{E}[|X|^r]<\infty$?

8.17 设 $X_t=(X_t^1, X_t^2)$ 表示一个标准的二维布朗运动. 令

$$\sigma_t = \min\{s : X_s^2 = t\}, \quad Y_t = X_{\sigma_t}^1.$$

(a) Y_t 满足下面性质中的哪些?

(i) $Y_0=0$;

(ii) 对任意 $s_1\leqslant t_1\leqslant s_2\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant t_n$, 随机变量 $Y_{t_1}-Y_{s_1}$, $Y_{t_2}-Y_{s_2}$, …, $Y_{t_n}-Y_{s_n}$ 相互独立;

(iii) 如果 $0\leqslant s<t$, 那么随机变量 Y_t-Y_s 与 Y_{t-s} 有同样的分布;

(iv) Y_t 是一个 t 的连续函数.

(b) 取 $\lambda>0$ 的什么值时可使过程 $Z_t=a^{-\lambda}Y_{at}$ 与 Y_{at} 有相同的分布? 198

第9章 随机积分

9.1 关于随机游动的积分

本章的目标是介绍关于布朗运动的随机积分思想. 为了让读者了解这个积分，我们将从介绍关于简单随机游动的积分开始. 令 X_1, X_2, …是相互独立的随机变量，$\mathbf{P}\{X_i=1\}=\mathbf{P}\{X_i=-1\}=\frac{1}{2}$，令 S_n 表示与此相对应的简单随机游动：

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

如 5.2 节的例 3，我们把 X_n 看做一个游戏在时刻 n 的结果，可以考虑此游戏的可行性赌博策略.

令$\mathcal{F}_n$ 表示 $X_1,\cdots,X_n$ 所包含的信息，令 B_n 表示第 n 盘游戏的“赌注”. B_n 既可以为正也可以为负，负值代表对 X_n 将出现 -1 下的赌注. 我们必须提出一个很重要的假设，即赌徒下的赌注只和时刻 n 前面的信息有关且并不包含 n 时刻的信息，也就是说，我们假设 B_n 是关于$\mathcal{F}_{n-1}$可测的. 那么到时刻 n 为止的赢利 Z_n 可以写为：

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} B_i X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i [S_i - S_{i-1}] = \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta S_i,$$

这里 $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$. 我们称 Z_n 为 B_n 关于 S_n 的积分.

此积分满足两个重要的性质. 第一个性质已经在 5.2 节例 3 中给出：过程 Z_n 是一个关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅，即如果 $m<n$，

$$\mathrm{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_m) = Z_m.$$

特别地，$\mathbf{E}(Z_n)=0$. 第二个性质是关于 Z_n 的二阶矩的. 假设赌注 B_n 存在有限的二阶矩，$\mathbf{E}(B_n^2)<\infty$. 那么

199

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \mathbf{E}(Z_n^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(B_i^2).$$

为了证明这个式子，我们展开平方项后写成

$$Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} B_i^2 X_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} B_i B_j X_i X_j.$$

注意到 $X_i^2=1$，因此

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} B_i^2 X_i^2\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(B_i^2).$$

假定 $i<j$. 那么 B_i，X_i，B_j 都是关于$\mathcal{F}_{j-1}$可测的，同时 X_j 和$\mathcal{F}_{j-1}$相互独立. 利用 (5.3)，我们可以得到

$$E(B_i B_j X_i X_j \mid \mathcal{F}_{j-1}) = B_i B_j X_i E(X_j \mid \mathcal{F}_{j-1}) = B_i B_j X_i \mathbf{E}(X_j) = 0,$$

因此

$$\mathbf{E}(B_i B_j X_i X_j) = \mathbf{E}[E(B_i B_j X_i X_j \mid \mathcal{F}_{j-1})] = 0.$$

9.2 关于布朗运动的积分

这里我们将介绍上一节中给出的离散积分的连续形式. 对应于一个简单随机游动, 我们将讨论一个标准(一维)的布朗运动, 把它写作 W_t. 可以把它想象成一个连续的公平游戏, 使得如果赌徒在整个时间区域 $[s, t]$ 内下一个单位的赌注, 那么赌徒在这个时间区域的赢利将会是 $W_t - W_s$.

令 Y_t 表示在时刻 t 下的所有赌注. 我们可以定义

$$Z_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s.$$

过程 Z_t 代表当在时刻 s 下的所有赌注为 Y_s 时, 到时刻 t 为止此游戏的所有赢利. 定义这个积分是一个非平凡的数学问题. 由于布朗运动样本轨迹的粗糙性质, 阻碍了我们定义如黎曼-斯蒂尔切斯 (Riemann-Stieljes) 一样的积分.

我们将对赌博策略 Y_s 给出两个假设. 第一个假设是: 对所有的 t 有 $\mathbf{E}(Y_t^2) < \infty$ 且对于每一个 t, 有

$$\int_0^t \mathbf{E}(Y_s^2) \mathrm{d}s < \infty.$$

如果我们加入赌博策略有界这个限制, 这个条件将显然满足. 第二个假设是关键性的, 和离散情形的假设相对应, 即假设赌徒不能根据未来的信息来决定所下的赌注. 令 $\mathcal{F}_t$ 表示直到时刻 t 的布朗运动所包含的信息. 我们假设 Y_t 是关于 $\mathcal{F}_t$ 可测的. 换言之, 赌徒可以通过观察直到时刻 t 的整个布朗运动来决定所下的赌注, 但是不能看到时刻 t 以后的任何信息. [200]

如果我们加入如下限制性假设: 赌徒只能在某个特定的有限时间集合 $(t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ 内改变赌注, 那么定义这个积分是不难的. 赌注具有如下形式:

$$Y_t = \begin{cases} Y_0, & 0 \leqslant t < t_1, \\ Y_1, & t_1 \leqslant t < t_2, \\ & \vdots \\ Y_n, & t_n \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

这里 $Y_0, \cdots, Y_n$ 是随机变量且 $\mathbf{E}(Y_i^2) < \infty$, 同时 Y_i 必须是关于 $\mathcal{F}_{t_i}$ 可测的 $(t_0 = 0)$. 如果一个赌博策略只能在某些有限的时间点上改变取值, 我们称这个赌博策略为简单策略. 对于简单策略, 我们定义 $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ 时的随机积分为

$$Z_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{j} Y_{i-1}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}] + Y_j[W_t - W_{t_j}].$$

简单策略的随机积分满足三个重要的性质. 第一个性质为线性: 如果 X_s 和 Y_s 是两个简单策略同时 a, b 是实数, 那么 $aX_s + bY_s$ 是一个简单策略, 且

$$\int_0^t (aX_s + bY_s) \mathrm{d}W_s = a\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s + b\int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s.$$

这个等式很容易验证.

其他两个性质是前一节中离散随机积分两个性质的直接等价形式. 我们称连续时间过程 Z_t 是一个关于 $\mathcal{F}_t$ 的鞅, 如果每个 Z_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的, 对于每个 t 有 $\mathbf{E}(|Z_t|) < \infty$; 且如果 $s < t$,

$$E(Z_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s. \tag{9.1}$$

第二个性质是如上定义的随机积分 Z_t 是一个关于$\mathcal{F}_t$的鞅，$\mathcal{F}_t$由布朗运动生成. 可以很容易看出 Z_t 是关于$\mathcal{F}_t$可测的，同时条件 $\mathbf{E}(|Z_t|)<\infty$满足来自于 Y_t 的二阶矩存在这个事实. 我们现在将证明 (9.1). 首先假设对于某些 j，$t_j \leqslant s < t \leqslant t_{j+1}$. 那么我们可以写出

$$Z_t = Z_s + Y_j[W_t - W_s].$$

因为 Y_j 和 Z_s 是$\mathcal{F}_s$ 可测的且 $W_t - W_s$ 和$\mathcal{F}_s$ 相互独立，

201

$$E(Z_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s + Y_j E(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) = Z_s + Y_j \mathbf{E}(W_t - W_s) = Z_s.$$

特别地，如果 $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$，

$$E(Z_{t_{j+1}} \mid \mathcal{F}_t) = Z_t, E(Z_t \mid \mathcal{F}_{t_j}) = Z_{t_j}.$$

注意到 $E(Z_t \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}) = E(E(Z_t \mid \mathcal{F}_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j-1}) = E(Z_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}) = Z_{t_{j-1}}$，通过迭代，我们可以看到对于所有的 $i \leqslant j$，$E(Z_t \mid \mathcal{F}_{t_i}) = Z_{t_i}$. 最后，如果对于某些 $i<j$，有 $t_i \leqslant s < t_{i+1}$，$t_j \leqslant t < t_{j+1}$，那么

$$E(Z_t \mid \mathcal{F}_s) = E(E(Z_t \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_s) = E(Z_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_s) = Z_s.$$

这就得出了 (9.1) 式.

第三个性质给出了计算这个二阶矩的一个方法，

$$\mathbf{E}(Z_t^2) = \int_0^t \mathbf{E}(Y_s^2)\mathrm{d}s. \tag{9.2}$$

式子的右边是一个关于标准微积分“ds”的积分. 为了证明这个式子，假设 $t_j \leqslant t < t_{j+1}$. 注意到 $\mathbf{E}(Y_s^2)$ 是一个在 s 的分段函数，因此

$$\int_0^t \mathbf{E}(Y_s^2)\mathrm{d}s = \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{E}(Y_i^2)(t_{i+1} - t_i) + \mathbf{E}(Y_j^2)(t - t_j).$$

如果我们展开平方项，可以看到

$$Z_t^2 = \sum_{i=1}^{j} Y_{i-1}^2[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]^2 + Y_j^2[W_t - W_{t_j}]^2 + (\text{交叉项}),$$

这里“交叉项”表示具有如下形式的式子之和：

$$Y_{i-1}Y_{k-1}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}][W_{t_k} - W_{t_{k-1}}], i < k,$$

或者

$$Y_{i-1}Y_j[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}][W_t - W_j].$$

如果 $i<k$，

$$\begin{aligned} &E(Y_{i-1}Y_{k-1}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}][W_{t_k} - W_{t_{k-1}}] \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= Y_{i-1}Y_{k-1}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]E(W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= Y_{i-1}Y_{k-1}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]\mathbf{E}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = 0, \end{aligned}$$

因此

202

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(Y_{i-1}Y_{k-1}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}][W_{t_k} - W_{t_{k-1}}]) \\ &= \mathbf{E}[E(Y_{i-1}Y_{k-1}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}][W_{t_k} - W_{t_{k-1}}] \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}})] = 0. \end{aligned}$$

同样，

$$\mathbf{E}(Y_{i-1}Y_j[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}][W_t - W_j]) = 0.$$

因此

$$\mathbf{E}(Z_t^2) = \sum_{i=1}^{j}\mathbf{E}(Y_{i-1}^2[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]^2) + \mathbf{E}(Y_j^2[W_t - W_{t_j}]^2).$$

注意到

$$\begin{aligned} E[Y_{i-1}^2[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] &= Y_{i-1}^2\mathbf{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \\ &= Y_{i-1}^2\mathbf{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \\ &= Y_{i-1}^2(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E}([Y_{i-1}^2[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]^2] = \mathbf{E}(E[Y_{i-1}^2[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]) = \mathbf{E}(Y_{i-1}^2)(t_i - t_{i-1}).$$

同样，

$$\mathbf{E}[Y_j^2[W_t - W_{t_j}]^2] = \mathbf{E}(Y_j^2)(t - t_j).$$

这就证明了 (9.2).

为了定义不为简单策略的赌博策略 Y_s 的随机积分，我们通过标准的数学程序来定义连续的情形——以离散的形式来近似，然后取极限. 令 Y_s 关于 $\mathcal{F}_s$ 可测，它满足上面给出的二阶矩条件. 还必须对 Y_s 作进一步恰当的数学假设：Y_s 的样本轨迹（Y_s 可以看做一个关于 s 的函数）必须是右连续的且具有左极限；对于我们的非正式处理，不必担心这个假设. 对于每个 $n\geqslant 0$，定义近似策略 $Y_s^{(n)}$ 为

$$Y_s^{(n)} = n\int_{(k-1)/n}^{k/n} Y_r \mathrm{d}r, \frac{k}{n} < s \leqslant \frac{k+1}{n},$$

这里我们设当 $s\leqslant 1/n$ 时，$Y_s^{(n)}=0$. 我们已经使得近似策略 $Y_s^{(n)}$ 对于每个 t 当 $0\leqslant s\leqslant t$ 时是一个简单策略且它关于 $\mathcal{F}_s$ 可测. 最重要的估计是证明如下命题（我们并不证明).

$$Y_s^{(n)} \to Y_s.$$

注意到对于每个 t

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \mathbf{E}([Y_s - Y_s^{(n)}]^2)\mathrm{d}s = 0.$$

203

这就容许我们定义随机积分

$$Z_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s,$$

称 Z_t 为随机变量的均方极限

$$Z_t^{(n)} = \int_0^t Y_s^{(n)} \mathrm{d}W_s.$$

随机积分的第一和第三个性质容许这个定义生效，因为当 n，$m\to\infty$时，

$$\mathbf{E}([Z_t^{(n)} - Z_t^{(m)}]^2) = \int_0^t \mathbf{E}([Y_s^{(n)} - Y_s^{(m)}]^2)\mathrm{d}s \to 0.$$

在证明上述极限成立的过程中，我们同样可以证明积分的三个性质成立.

线性:

$$\int_0^t [aX_s + bY_s]\mathrm{d}W_s = a\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s + b\int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s.$$

鞅性: $Z_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s$ 是一个关于$\mathcal{F}_t$ 的鞅，特别地，对于所有的 t，$\mathbf{E}(Z_t)=0$.

二阶矩等式：

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s\right) = \mathbf{E}\left[\left(\int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbf{E}[Y_s^2]\mathrm{d}s.$$

等式

$$Z_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s$$

经常写成下面的微分形式：

$$\mathrm{d}Z_t = Y_t \mathrm{d}W_t.$$

过程 Z_t 可以看做这样的一个过程：在时刻 t 它看起来像一个方差参数为 Y_t^2 的布朗运动（回想一下，如果 W_t 是一个标准的布朗运动，那么 σW_t 是一个方差参数为 σ^2 的布朗运动）．有时候，我们有一个过程

204

$$Z_t = \int_0^t X_s \mathrm{d}s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s,$$

这里“ds”项积分是一个标准形式的微积分．写成微分形式得到：

$$\mathrm{d}Z_t = X_t \mathrm{d}t + Y_t \mathrm{d}W_t.$$

这个式子表示这样一个过程：在时刻 t，它看起来像漂移为 X_t 且方差参数为 Y_t^2 的布朗运动．

9.3 Itô公式

我们怎样计算随机积分呢？例如，考虑积分

$$Z_t = \int_0^t W_s \mathrm{d}W_s.$$

W_s 是 $\mathcal{F}_s$ 可测的且这个积分是定义合理的．我们可能会期望标准的微积分学计算法则对随机积分同样成立，在这种情形下，我们得到：

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}W_0^2 = \frac{1}{2}W_t^2.$$

然而，我们可以很快发现这个方程并不成立：上式左边的随机变量的期望为 0，而右边的随机变量的期望为$\frac{t}{2}$．在这一节中，我们将推导出一个精确计算随机积分的公式．这个公式通常称为 Itô公式，它是随机微积分学的基础理论．

我们首先来回顾一下微积分学的普通基础理论．假设我们有一个连续可微函数 $f(t)$．在每个 t_0 附近，我们可以把 $f(t)$展开，

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0).$$

我们可以把 $f(t)$ 写成如下的求和形式：

$$f(t) = f(0) + \sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{(j+1)t}{n}\right) - f\left(\frac{jt}{n}\right)\right].$$

我们现在利用在 jt/n 处的泰勒级数，写成

205

$$f\left(\frac{(j+1)t}{n}\right) = f\left(\frac{jt}{n}\right) + f'\left(\frac{jt}{n}\right)\frac{t}{n} + to\left(\frac{1}{n}\right),$$

那么

$$f(t)-f(0)=\sum_{j=0}^{n-1}f'\left(\frac{jt}{n}\right)\frac{t}{n}+\sum_{j=0}^{n-1}to\left(\frac{1}{n}\right).$$

当 $n\to\infty$ 时，上式右边的第二项趋于 0，第一项趋于 f' 的积分．因此我们得到

$$f(t)-f(0)=\int_0^t f'(s)\mathrm{d}s,$$

这个式子是我们大家都很熟悉的．

现在令 W_t 是一个布朗运动，且函数 f 至少具有二阶连续导数．在每个 x_0，我们可以展开 $f(x)$，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2).$$

把 $f(W_t)$ 写成如下求和形式：

$$f(W_t)=f(W_0)+\sum_{j=0}^{n-1}[f(W_{\frac{j+1}{n}t})-f(W_{\frac{j}{n}t})].$$

利用泰勒级数，在 $W_{\frac{j}{n}t}$ 处我们可以写出

$$\begin{aligned}f(W_{\frac{j+1}{n}t})&=f(W_{\frac{j}{n}t})+f'(W_{\frac{j}{n}t})[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]\\&\quad+\frac{1}{2}f''(W_{\frac{j}{n}t})[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2+to\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

因为 $[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2$ 与 (t/n) 同阶，因此 $o(\cdot)$ 比 n^{-1} 小．因此我们得到

$$\begin{aligned}f(W_t)-f(W_0)&=\sum_{j=0}^{n-1}f'(W_{\frac{j}{n}t})[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}f''(W_{\frac{j}{n}t})[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2+\sum_{j=0}^{n-1}to\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}\qquad(9.3)$$

当 $n\to\infty$ 时，上式中右边的第三项趋于 0．由于 f' 是连续的，上式中右边第一项将趋于

$$\int_0^t f'(W_s)\mathrm{d}W_s.$$

206

为了得到第二项的收敛值，让我们考虑一般性问题，即考虑如下极限：

$$\sum_{j=0}^{n-1}g(W_{\frac{j}{n}t})[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2,$$

这里 g 为一个连续的函数．首先我们考虑 g 恒等于 1 的情况．令

$$Q_t^{(n)}=\sum_{j=0}^{n-1}[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2.$$

极限

$$Q_t=\lim_{n\to\infty}Q_t^{(n)}$$

经常被称为 W_t 的*二次变差*（quadratic variation）．$[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2$ 与 $(t/n)U^2$ 服从相同的分布，U 为标准正态分布，均值为 0，方差为 1．注意到

$$\mathbf{E}(U^2)=1\qquad \mathrm{Var}(U^2)=\mathbf{E}(U^4)-[\mathbf{E}(U^2)]^2=2.$$

于是，由于 W 的增量是相互独立的，

$$\mathbf{E}(Q_t^{(n)})=\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}([W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2)=t,$$

$$\mathrm{Var}(Q_t^{(n)})=\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{Var}([W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2)=n\mathrm{Var}((t/n)U^2)=\frac{2t^2}{n}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$Q_t^{(n)}$ 的期望为常数，而方差趋于 0. 换言之，极限随机变量 Q_t 是一个常数，同时直到时间 t 的布朗运动的二次变差是一个等于 t 的常值随机变量.

对于任何的 g，令

$$Q_t^{(n)}(g)=\sum_{j=0}^{n-1}g(t)[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]^2,$$

且

$$Q_t(g)=\lim_{n\to\infty}Q_t^{(n)}(g).$$

如果 g 是具有如下形式的一个分段函数：

207

$$g(s)=u(W_{\frac{j}{m}t}),\frac{j}{m}t\leqslant s<\frac{j+1}{m}t,$$

那么

$$\begin{aligned}Q_t(g)&=\lim_{n\to\infty}Q_t^{(n)}(g)\\&=\lim_{k\to\infty}Q_t^{(km)}(g)\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1}u(W_{\frac{j}{m}t})\sum_{i=0}^{k-1}[W_{\frac{kj+i+1}{km}t}-W_{\frac{kj+i}{km}t}]^2\\&=\sum_{j=0}^{m-1}u(W_{\frac{j}{m}t})\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k-1}[W_{\frac{kj+i+1}{km}t}-W_{\frac{kj+i}{km}t}]^2.\end{aligned}$$

二次变差的结果告诉我们

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k-1}[W_{\frac{kj+i+1}{km}t}-W_{\frac{kj+i}{km}t}]^2=\frac{t}{m}.$$

因此

$$Q_t(g)=\sum_{j=0}^{m-1}u(W_{\frac{j}{m}t})\frac{t}{m}.$$

现在假定 g 是连续的. 对于每个 n，令 g_n 为分段函数

$$g_n(s)=g(t),\frac{j}{n}t\leqslant s<\frac{j+1}{n}t.$$

注意到

$$|Q_t(g)-Q_t(g_n)|\leqslant\|g-g_n\|Q_t=t\|g-g_n\|,$$

其中

$$\|g-g_n\|=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|g(s)-g_n(s)|.$$

g 的连续性质意味着当 $n\to\infty$ 时 $\|g-g_n\|\to0$. 因此

$$Q_t(g)=\lim_{n\to\infty}Q_t(g_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}g\left(\frac{j}{n}t\right)\frac{t}{n}.$$

最后一个表达式是函数 g 的积分的通常表现形式，它表示黎曼和的极限. 因此，如果 g 是连续的，

208

$$Q_t(g)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s.$$

注意到，如果 h 是连续的，那么由于 W_t 连续，函数 $g(t)=h(W_t)$ 也连续. 如果我们把这一结果带入到（9.3）式，可以得到如下公式.

Itô公式 如果 f 是一个具有二阶连续导数的函数，且 W_t 是一个标准的布朗运动，

$$f(W_t)-f(W_0)=\int_0^t f'(W_s)\mathrm{d}W_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\mathrm{d}s.$$

这个公式有时被写成微分的形式，

$$\mathrm{d}f(W_t)=f'(W_t)\mathrm{d}W_t+\frac{1}{2}f''(W_t)\mathrm{d}t.$$

例 1 令 $f(t)=t^2$. 那么 $f'(t)=2t$，$f''(t)=2$，且

$$W_t^2=\int_0^t 2W_s\mathrm{d}W_s+\frac{1}{2}\int_0^t 2\mathrm{d}s,$$

或者

$$\int_0^t W_s\mathrm{d}W_s=\frac{1}{2}W_t^2-\frac{1}{2}t.$$

这是一个特别好的例子；一般地，我们不可能通过 Itô公式确切地计算出积分.

例 2 考虑过程

$$X_t=\mathrm{e}^{W_t}.$$

这个过程被称为几何布朗运动（geometric Brownian motion），并常被用到股票定价模型中. 关于函数 $f(t)=\mathrm{e}^t$ 的 Itô公式告诉我们

$$X_t-1=\int_0^t \mathrm{e}^{W_s}\mathrm{d}W_s+\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{W_s}\mathrm{d}s.$$

换言之，X_t 满足随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t=X_t\mathrm{d}W_t+\frac{1}{2}X_t\mathrm{d}t.$$

9.4 Itô公式的扩展形式

假定 W_t 是一个标准布朗运动且 Z_t 满足

$$\mathrm{d}Z_t=X_t\mathrm{d}t+Y_t\mathrm{d}W_t, \tag{9.4}$$

209

这里 X_t，Y_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的且具有连续的样本轨迹. 换言之，

$$Z_t=Z_0+\int_0^t X_s\mathrm{d}s+\int_0^t Y_s\mathrm{d}W_s.$$

如果 R_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，我们定义 $\int_0^t R_s\mathrm{d}Z_s$ 为

$$\int_0^t R_s\mathrm{d}Z_s=\int_0^t R_s(X_s\mathrm{d}s+Y_s\mathrm{d}W_s)$$
$$=\int_0^t R_sX_s\mathrm{d}s+\int_0^t R_sY_s\mathrm{d}W_s.$$

假定 f 具有连续的二阶导数. 和前一节一样，我们可以写成

$$f(Z_t)-f(Z_0)=\sum_{j=0}^{n-1}f'(Z_{\frac{j}{n}t})[Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}f''(Z_{\frac{j}{n}t})[Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}]^2+\sum_{j=0}^{n-1}to\left(\frac{1}{n}\right). \tag{9.5}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式最后一个求和项趋于 0. 因为 Z_t 满足 (9.4)，

$$Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}\approx X_{\frac{j}{n}t}\frac{t}{n}+Y_{\frac{j}{n}t}[W_{\frac{j+1}{n}t}-Y_{\frac{j}{n}t}],$$

求极限，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}f'(Z_{\frac{j}{n}t})[Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}f'(Z_{\frac{j}{n}t})X_{\frac{j}{n}t}\frac{t}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}f'(Z_{\frac{j}{n}t})Y_{\frac{j}{n}t}[W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}]\\&=\int_0^t f'(Z_s)X_s\mathrm{d}s+\int_0^t f'(Z_s)Y_s\mathrm{d}W_s\\&=\int_0^t f'(Z_s)\mathrm{d}Z_s.\end{aligned}$$

和上一节一样，我们可以看到

210

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}f''(Z_{\frac{j}{n}t})[Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}]^2=\int_0^t f''(Z_s)\mathrm{d}\langle Z\rangle_s,$$

这里 $\langle Z\rangle_t$ 表示 Z_t 的二次变差，

$$\langle Z\rangle_t=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}[Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}]^2.$$

如果我们仅仅考虑 Z_t 的随机积分部分的二次变差，得到

$$\begin{aligned}\langle\int_0^t Y_s\mathrm{d}W_s\rangle_t&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\int_{jt/n}^{(j+1)t/n}Y_s\mathrm{d}W_s\right]^2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}([Y_{\frac{j}{n}t}+o(1)][W_{\frac{j+1}{n}t}-W_{\frac{j}{n}t}])^2\\&=\int_0^t Y_s^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

我们在这里已经舍去了一些细节，但是基本思想和前一节相同. 同样地，

$$Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}=O\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{jt/n}^{(j+1)t/n}Y_s\mathrm{d}W_s,$$

因此

$$[Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}]^2=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)+\left[\int_{jt/n}^{(j+1)t/n}Y_s\mathrm{d}W_s\right]^2.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\langle Z\rangle_t&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}[Z_{\frac{j+1}{n}t}-Z_{\frac{j}{n}t}]^2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\int_{jt/n}^{(j+1)t/n}Y_s\mathrm{d}W_s\right]^2\\&=\langle\int_0^t Y_s\mathrm{d}W_s\rangle_t=\int_0^t Y_s^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

换言之，Z 的二次变差和它的"随机积分"部分的二次变差是相同的. 综上所述，我们得到如下结论.

Itô公式Ⅱ 如果 f 具有二阶连续导数，同时 Z_t 满足 (9.4)，那么

$$f(Z_t)-f(Z_0)=\int_0^t f'(Z_s)\mathrm{d}Z_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)\mathrm{d}\langle Z\rangle_s$$

$$=\int_0^t f'(Z_s)Y_s\mathrm{d}W_s+\int_0^t\left[f'(Z_s)X_s+\frac{1}{2}f''(Z_s)Y_s^2\right]\mathrm{d}s.$$

211

我们现在进行进一步推广，假设 $f(t, x)$ 是关于时间 t 和空间 x 的一个函数. 我们将需要假设 f 关于 x 具有二阶连续导数，同时关于 t 具有一阶连续导数. 我们将把 $f'(t, x)$ 和 $f''(t, x)$ 看做是关于 x 的偏导，把 $\dot{f}(t, x)$ 看做是关于 t 的偏导. 可以把 $f(t, Z_t)-f(0, Z_0)$ 展开成为两项相加的形式：

$$f(t,Z_t)-f(0,Z_0)=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{j+1}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right)-f\left(\frac{j}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right)\right]$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{j}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right)-f\left(\frac{j}{n}t,Z_{\frac{j}{n}t}\right)\right].$$

利用近似项

$$f\left(\frac{j+1}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right)-f\left(\frac{j}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right)\approx\frac{t}{n}\dot{f}\left(\frac{j}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right),$$

可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{j+1}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right)-f\left(\frac{j}{n}t,Z_{\frac{j+1}{n}t}\right)\right]=\int_0^t\dot{f}(s,Z_s)\mathrm{d}s.$$

第二个求和项的极限可以作和前面一样的处理. 这样就给出了如下公式.

Itô公式Ⅲ 如果 $f(t, x)$ 关于 x 具有二阶连续导数，同时关于 t 具有一阶连续导数，且 Z_t 满足 (9.4)，那么

$$f(t,Z_t)-f(0,Z_0)=\int_0^t\dot{f}(s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_0^t f'(s,Z_s)\mathrm{d}Z_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(s,Z_s)\mathrm{d}\langle Z\rangle_s$$

$$=\int_0^t f'(s,Z_s)Y_s\mathrm{d}W_s+\int_0^t\left[\dot{f}(s,Z_s)+f'(s,Z_s)X_s+\frac{1}{2}f''(s,Z_s)Y_s^2\right]\mathrm{d}s.$$

这个公式的一个特例是当 $Z_t=W_t$ 时. 那么

$$f(t,W_t)-f(0,W_0)=\int_0^t f'(s,W_s)\mathrm{d}W_s+\int_0^t\left[\dot{f}(s,W_s)+\frac{1}{2}f''(s,W_s)\right]\mathrm{d}s.$$

212

例 1 令 $f(t, x)=\mathrm{e}^{at+bx}$，这里 a，b 是实数. 那么 $Z_t=\mathrm{e}^{at+bW_t}$ 满足随机微分方程

$$\mathrm{d}Z_t=bZ_t\mathrm{d}W_t+\left(a+\frac{b^2}{2}\right)Z_t\mathrm{d}t.$$

等价地，如下方程

$$\mathrm{d}Z_t=rZ_t\mathrm{d}t+bZ_t\mathrm{d}W_t$$

的解为

$$Z_t=\exp\left\{bW_t+\left(r-\frac{b^2}{2}\right)t\right\}.\tag{9.6}$$

另一个扩展是考虑布朗运动为多于一维的情况. 假设 $W_t=(W_t^1, \cdots, W_t^d)$ 是一个 d 维的标准

布朗运动且 $f(x^1, \cdots, x^d)$ 是一个 $\mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数，同时它具有二阶连续导数. 如果在 $x=(x^1, \cdots, x^d)$ 处把 f 展开成泰勒级数，我们得到

$$f(y)=f(x)+\sum_{i=1}^{d} f_i(x)(y^i-x^i)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} f_{jk}(x)(y^j-x^j)(y^k-x^k)+o(|y-x|^2).$$

这里我们应用下标来表示偏导. 和前面一样，我们可以把 $f(W_t)$ 写为如下的求和形式：

$$f(W_t)-f(W_0)=\sum_{i=1}^{d}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n-1} f_i(W_{\frac{l}{n}t})(W^i_{\frac{l+1}{n}t}-W^i_{\frac{l}{n}t})\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{d}\left[\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n-1} f_{jj}(W_{\frac{l}{n}t})(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})^2\right]$$
$$+\sum_{j\neq k}\left[\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n-1} f_{jk}(W_{\frac{l}{n}t})(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})\right].$$

前两个求和项的形式我们已经看到过. 为了找到最后一个求和项的极限，我们证明“协方差”满足：

213

$$\langle W^j, W^k\rangle_t := \lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n-1}(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})=0.$$

这个等式的证明和前一节中二次变差的证明一样. 在这种情形下，

$$\mathbf{E}\left[\sum_{l=0}^{n-1}(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})\right]$$
$$=\sum_{l=0}^{n-1}\mathbf{E}\left[(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})\right]$$
$$=\sum_{l=0}^{n-1}\mathbf{E}(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})\mathbf{E}(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})=0,$$

且随机变量的方差为

$$\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{Var}[(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})]$$
$$=\sum_{l=0}^{n-1}\mathbf{E}[(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})^2(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})^2]$$
$$=\sum_{l=0}^{n-1}\mathbf{E}[(W^j_{\frac{l+1}{n}t}-W^j_{\frac{l}{n}t})^2]\mathbf{E}[(W^k_{\frac{l+1}{n}t}-W^k_{\frac{l}{n}t})^2]$$
$$=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t}{n}\frac{t}{n}\to 0.$$

因此，$f(W_t)-f(W_0)$ 的最后一个求和项在求极限的时候将会消失. 如果 f 也依赖于 t 的话，它可以和上面一样进行处理. 我们现在进行归纳. 回想一下 f 的拉普拉斯算子定义为

$$\Delta f(x)=\sum_{j=1}^{d} f_{jj}(x).$$

Itô公式Ⅳ 假定 $f(t,x^1,\cdots,x^d)$ 是一个函数，它关于 t 具有一阶连续导数，关于 $x=(x^1,\cdots,$

x^d）具有二阶连续导数．假设 $W_t=(W_t^1,\cdots,W_t^d)$ 是一个 d 维的标准布朗运动．那么，

$$f(t,W_t)-f(0,W_0)=\sum_{i=1}^{d}\int_0^t f_i(W_s)\mathrm{d}W_s^i+\int_0^t[\dot f(W_s)+\frac{1}{2}\Delta f(W_s)]\mathrm{d}s.$$

随机微积分计算和普通微积分计算相似，只是增加了一个附加的规则．我们从微分的角度考虑微积分．如果 $h(t)$ 是一个函数，且 $\Delta h(t)=h(t+\Delta t)-h(t)$，那么 $h'(t)$ 通过如下规则定义：

$$\Delta h(t)=h'(t)\Delta t+o(\Delta t),\Delta t\to 0.$$

214

为了计算 $h'(t)$，我们计算 $\Delta h(t)$，然后把所有包含 $o(\Delta t)$ 的项扔掉．例如，假设 $h(t)=f(t)g(t)$，f 和 g 都是可微的．那么

$$\begin{aligned}\Delta h(t)&=f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t)g(t)\\&=f(t+\Delta t)[g(t+\Delta t)-g(t)]+g(t)[f(t+\Delta t)-f(t)]\\&=[f(t)+f'(t)\Delta t+o(\Delta t)][g'(t)\Delta t+o(\Delta t)]+g(t)[f'(t)\Delta t+o(\Delta t)]\\&=[f(t)g'(t)+f'(t)g(t)]\Delta t+o(\Delta t).\end{aligned}$$

上面的式子给出了乘积法则 $(fg)'=f'g+fg'$．

如果 W_t^1，…，W_t^d 是相互独立的布朗运动，那么布朗运动的增量 ΔW_t^j 与 $\sqrt{\Delta t}$ 同阶．因此，如果我们把其中的两个相乘，得到的结果与 Δt 同阶，这样就不能把它扔掉了．如果我们把其中的三个相乘，或者如果我们把它们其中之一乘以一个阶数为 Δt 的项，那么得到的积的阶数为 $(\Delta t)^{3/2}$，这个积就可以扔掉了．因此，为了进行随机微积分计算，我们仅仅只要在普通微积分计算中加上处理两个布朗运动增量乘积的法则就可以了．Itô公式告诉我们怎样做．从微分的角度，我们有

$$(\Delta W_t^j)^2=\Delta\langle W^j\rangle_t=\Delta t,$$
$$(\Delta W_t^j)(\Delta W_t^k)=\Delta\langle W^j,W^k\rangle_t=0,j\neq k.$$

更一般地，如果

$$\mathrm{d}Z_t^1=X_t^1\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{d}Y_t^{j,1}\mathrm{d}W_t^j,\tag{9.7}$$

$$\mathrm{d}Z_t^2=X_t^2\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{d}Y_t^{j,2}\mathrm{d}W_t^j,\tag{9.8}$$

那么协方差项为

$$\langle Z^1,Z^2\rangle_t=\sum_{j=1}^{d}\int_0^t(Y_t^{j,1}Y_t^{j,2})\mathrm{d}t,$$

即

$$\mathrm{d}\langle Z^1,Z^2\rangle_t=\sum_{j=1}^{d}(Y_t^{j,1}Y_t^{j,2})\mathrm{d}t.$$

215

这就容许我们推导出随机微积分的乘积法则．注意到我们可以得到

$$\Delta(Z_t^1Z_t^2)=Z_{t+\Delta t}^1\Delta Z_t^2+Z_t^2\Delta Z_t^1=Z_t^1\Delta Z_t^2+Z_t^2\Delta Z_t^1+\Delta Z_t^1\Delta Z_t^2.$$

乘积法则 如果 Z_t^1，Z_t^2 满足 (9.7) 和 (9.8)，那么

$$\mathrm{d}(Z_t^1Z_t^2)=Z_t^1\mathrm{d}Z_t^2+Z_t^2\mathrm{d}Z_t^1+\mathrm{d}\langle Z^1,Z^2\rangle_t.\tag{9.9}$$

例 2 **指数鞅**．假设 $\mathrm{d}Z_t=Y_t\mathrm{d}W_t$，那么 Z_t 是一个鞅．由 Itô公式得到

$$\mathrm{d}[\mathrm{e}^{Z_t}] = \mathrm{e}^{Z_t} Y_t \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{Z_t} Y_t^2 \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{Z_t}\mathrm{d}Z_t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{Z_t}\mathrm{d}\langle Z\rangle_t.$$

假设有足够的有界性条件使得 $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{Z_t}] < \infty$，例如 Y_t 有界．我们从微分方程可以看到 e^{Z_t} 是一个下鞅（$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{Z_t} \mid \mathcal{F}_s) \geqslant \mathrm{e}^{Z_s}$）但不是一个鞅（如果 Y 不为零）．得到一个鞅的方法是减去 "$\mathrm{d}t$" 项．另一种方法是给 e^{Z_t} 乘上一个合适的过程．令 $M_t = \mathrm{e}^{Z_t} R_t$，其中

$$R_t = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 \mathrm{d}s\right\}.$$

注意到 R_t 是随机但可微的；实际上，$\dot{R}_t = -(Y_t^2/2)\ R_t$．由于 R_t 是可微的，$\langle \mathrm{e}^Z, R\rangle_t = 0$（因为 $\Delta\langle \mathrm{e}^{Z_t} R_t\rangle$ 与 $(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$ 同阶）．因此由乘积法则，我们得到

$$\mathrm{d}M_t = R_t \mathrm{d}(\mathrm{e}^{Z_t}) + \mathrm{e}^{Z_t}\mathrm{d}R_t = M_t Y_t \mathrm{d}W_t = M_t \mathrm{d}Z_t.$$

因此，M_t 是一个鞅．这个过程有时叫做**指数鞅**（exponential martingale)，因为它满足类似于指数微分方程 $f'(t) = af(t)$ 的随机微分方程形式．

9.5 连续鞅

如果 W_t 是一个标准的布朗运动，Y_t 为 $\mathcal{F}_t$ 可测，$\mathcal{F}_t$ 是指 $W_s(0 \leqslant s \leqslant t)$ 所包含的信息，同时

216

$$\int_0^t \mathbf{E}[Y_s^2]\mathrm{d}s < \infty,$$

那么

$$M_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s \tag{9.10}$$

是一个均方可积鞅，即关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 且满足 $\mathbf{E}[M_t^2] < \infty$ 的一个鞅．同时它也是一个**连续鞅**（continuous martingale)，即函数 $t \mapsto M_t$ 是以概率 1 连续的．第 5 章的很多结论同样适用于连续鞅，这些结果只要通过一点额外的努力就可以证明．注意到，如果 $\delta > 0$，那么 $\hat{M}_n := M_{\delta n}$ 是关于 $\hat{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_{\delta n}$ 的一个（离散时间）鞅．如果 T 是关于 $\mathcal{F}_t$ 的一个停时，我们定义停时 $T^{(\delta)}$ 为满足条件 $\delta n \geqslant T$ 的最小整数 n．为了判定 $T^{(\delta)} = n$ 是否成立，必须当布朗运动 W_t 经过时间 δn 时，才有足够的证据做出判断；因此，$T^{(\delta)}$ 是一个离散时间鞅的停时．通过令 $\delta \to 0$，下面的由第 5 章得到的扩展结果是成立的．

可选抽样理论 Ⅰ 如果 M_t 是一个连续鞅且 T 是一个关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的有界停时，那么

$$\mathbf{E}[M_T] = M_0.$$

可选抽样理论 Ⅱ 如果 M_t 是一个连续鞅且 T 是一个关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的停时，它满足条件 $\mathbf{P}\{T < \infty\} = 1$；

$$\mathbf{E}[\mid M_T \mid] < \infty,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[\mid M_t \mid 1\{\mid T \mid > t\}] = 0,$$

那么

$$\mathbf{E}[M_t] = \mathbf{E}[M_0].$$

极大不等式 如果 M_t 是一个具有形式 (9.10) 的连续均方可积鞅，那么对于每个 $a > 0$，

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|\geqslant a\right\}\leqslant\frac{\mathbf{E}[M_t^2]}{a^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^t\mathbf{E}[Y_s^2]\mathrm{d}s.$$

如果 M_t 是一个关于 $\mathcal{F}_t$ 的连续鞅且 T 是一个停时，那么，$J_t=M_{t\wedge T}$ 是一个连续鞅. 这里 $t\wedge T=\min\{t, T\}$. 假定 U 是 $\mathbf{R}^d$ 中的一个开子集，$f(t,x^1,\cdots,x^d)$ 是一个连续函数，它关于 t 存在一阶连续导数，同时对于空间变量 $x=(x^1, \cdots, x^d)\in U$ 存在二阶连续导数. 假定 Z_t 满足（9.4）且令 T 为使得 Z_t 不在 U 上的首达时间. 那么 Itô公式描述了 $t<T$ 时函数 $f(t\wedge T, Z_{t\wedge T})$ 的演变. 例如，假定 W_t 是一个标准的 d 维布朗运动且 U 是 $\mathbf{R}^d$ 中的一个有界开集. 令 f: $\mathbf{R}^d\rightarrow\mathbf{R}$ 是一个连续函数，使得当 $x\in U$ 时，$\Delta f(x)=0$. 那么由 Itô公式得到 $M_t=f(W_{t\wedge T})$ 是一个连续鞅. 如果 $W_0\in\overline{U}$，那么 M_t 是一个有界鞅（因为 f 在紧集 $\overline{U}$ 上是一个有界函数），因此，如果 $x\in\overline{U}$， [217]

$$f(x)=\mathbf{E}[M_0\mid W_0=x]=\mathbf{E}[M_T\mid W_0=x]=\mathbf{E}[f(W_T)\mid W_0=x].$$

9.6 吉尔萨诺夫变换

假定我们玩一个简单的游戏. 投掷一枚硬币. 如果得到头像朝上，那么我们赢得 1 元钱；否则，我们失去 1 元钱. 然而，假设硬币不均匀，使得每次硬币出现背面的概率为 $\frac{3}{4}$. 这是一个不公平的游戏. 这里可以尝试两种自然的方法使得这个游戏公平.

- 改变收益，使得当出现头像朝上时，我们赢得 1.5 元，当出现背面时，我们输掉 0.5 元. 在这种情况下，期望收益是 0.
- 改变（或者替换）硬币，使得头像朝上的概率为 $\frac{1}{2}$.

在这一节中，我们将讨论把带漂移的连续过程转化为不带漂移的过程的一种方法，这一方法是上面第二种选择的一个类似形式.

假设 Z_t 满足

$$\mathrm{d}Z_t=X_t\mathrm{d}t+Y_t\mathrm{d}W_t, \tag{9.11}$$

这里 W_t 是一个标准的布朗运动. 令 $\mathcal{F}_t$ 表示在 $\{W_s: s\leqslant t\}$ 中的信息，且假设 X_t，Y_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的. 如果 X_t 是非零的，那么 Z_t 不是一个鞅. 从 Z_t 得到一个鞅的办法是减去 "dt" 那一项. 这一做法相当于前面的第一种方法. 我们将描述得到鞅的另外一种方法，它和第二种方法等价，叫做吉尔萨诺夫（Girsanov）或者 Cameron-Martin 变换.

相对于减去漂移项，我们将改变路径的权重. 通过给和漂移移动方向相反的那些路径很大的权重，使其平衡，即平均漂移项为 0. 为了解释这一思想，我们将从一个离散的例子开始. 假定 J_1，J_2，…是相互独立的随机变量，满足

$$\mathbf{P}\{J_j=1\}=1-\mathbf{P}\{J_j=-1\}=p,$$

[218]

这里 $0<p<1$. 令 $S_0=0$，$S_n=J_1+\cdots+J_n$，同时令 $\mathcal{F}_n$ 表示 J_1，…，J_n 包含的信息. 如果 $p\neq\frac{1}{2}$，那么 S_n 不是关于$\mathcal{F}_n$ 的一个鞅. 而 $S_n-n(2p-1)$ 是一个鞅，我们将考虑另一个鞅，尽管它保持路径相同，但测度却改变了. 我们的过程 S_n 可以看做长度为 n 的随机游动路径上的一个测度 $\mathbf{P}$，它给每个特殊路径以测度 $p^{(n+S_n)/2}(1-p)^{(n-S_n)/2}$（注意到在开始的 n 步中，出现

"+1"的步数为 $(n+S_n)/2$，出现"−1"的步数为 $(n-S_n)/2$. 我们可以写为

$$p^{(n+S_n)/2}(1-p)^{(n-S_n)/2} = [4p(1-p)]^{n/2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{S_n/2}2^{-n}.$$

令

$$M_n = [4p(1-p)]^{-n/2}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n/2}.$$

我们定义路径 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 上的测度为 $\widetilde{\mathbf{P}}=M_n\mathbf{P}$. 更确切地，如果 A 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的，那么

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A) = \mathbf{E}[I_A M_n],$$

这里 I_A 表示示性函数. 注意到，$\widetilde{\mathbf{P}}$ 给予每个路径的测度为 2^{-n}. 特别地，过程 S_n，关于测度 $\widetilde{\mathbf{P}}$，是一个鞅.

为了一般化这一思想，我们将给出权函数 M_n 的一个性质. 使得上述工作成功的是 M_n 和 M_nS_n 都是鞅（关于测度 $\mathbf{P}$）这一事实，见习题 5.10. 如我们现在演示的那样，为了让上述测度定义合理，我们需要 M_n 是一个鞅. 假设 A 是关于 $\mathcal{F}_m$ 可测的，同时 $m<n$. 那么 A 也是 $\mathcal{F}_n$ 可测的，因此 $\widetilde{\mathbf{P}}(A)$ 的两个公式可以得到一样的答案. 但是，由于 M_n 是一个鞅，

$$\mathbf{E}[M_nI_A] = \mathbf{E}[E(M_nI_A \mid \mathcal{F}_m)] = \mathbf{E}[I_AE(M_n \mid \mathcal{F}_m)] = \mathbf{E}[E_mI_A].$$

为了让 S_n 关于测度 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 是一个鞅，我们需要证明：如果 $m<n$，那么

$$E_{\widetilde{\mathbf{P}}}(S_n \mid \mathcal{F}_m) = S_m.$$

这里，$E_{\widetilde{\mathbf{P}}}(S_n \mid \mathcal{F}_m)$ 表示在测度为 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 时的条件期望. 利用条件期望的定义，我们可以看到这一等式相当于证明对于所有关于 $\mathcal{F}_m$ 可测的事件 A，满足

$$\mathbf{E}[1_AS_mM_m] = \mathbf{E}[1_AS_nM_n].$$

219 但是，这仅仅是说明 $E(M_nS_n \mid \mathcal{F}_m) = M_mS_m$ 的另外一种方法，即 M_nS_n 是一个鞅.

我们回到连续的情形，假设 Z_t 满足 (9.11). 新的权重将以非负鞅 M_t（关于 $\mathcal{F}_t$ 可测）的形式给出，且 $M_0=1$. 我们将通过式子"$d\widetilde{\mathbf{P}}=M_t d\mathbf{P}$"定义一个新的测度 $\widetilde{\mathbf{P}}$. 更确切地说，如果 A 是 $\mathcal{F}_t$ 可测事件，那么

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A) = \mathbf{E}[I_AM_t].$$

如果 $s<t$，且 A 是 $\mathcal{F}_s$ 可测的，那么它也是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，因此看起来 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 的定义并不合理. 然而，由于 M_t 是一个鞅，

$$\mathbf{E}[I_AM_t] = \mathbf{E}[E(I_AM_t \mid \mathcal{F}_s)] = \mathbf{E}[I_AE(M_t \mid \mathcal{F}_s)] = \mathbf{E}[I_AM_s].$$

这就说明 $\widetilde{\mathbf{P}}(A)$ 的定义是合理的. 我们说 M_t 是 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 关于 $\mathbf{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数.

我们想要选择 M_t 使得 Z_t 是一个 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 可测鞅，即在我们使用测度 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 时，它是一个鞅. 如果 M_t 和 M_tZ_t 都是鞅（关于测度 $\mathbf{P}$），这将是正确的. 利用和上述离散情形一样的讨论方法，可以得到这一结果.

假设 M_t 是一个鞅，它具有形式 $dM_t=R_tdW_t$. 那么乘积法则告诉我们：

$$\begin{aligned} d[M_tZ_t] &= M_tdZ_t + Z_tdM_t + d\langle M,Z\rangle_t \\ &= [M_tX_t + R_tY_t]dt + [M_tY_t + Z_tR_t]dW_t. \end{aligned}$$

如果 $R_t=-M_tX_t/Y_t$，且某些有界条件满足，那么这将是一个鞅.

吉尔萨诺夫变换 如果 Z_t 满足 (9.11) 且 M_t 是一个鞅，它满足

$$dM_t = -\frac{X_t}{Y_t} M_t dW_t,$$

那么 Z_t 关于测度 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 是一个鞅，$\widetilde{\mathbf{P}}$ 满足

$$d\widetilde{\mathbf{P}} = M_t d\mathbf{P}.$$

例 1 假设 Z_t 是一个带漂移的布朗运动，即

$$dZ_t = \mu dt + dW_t.$$

我们想要 $R_t = -\mu M_t$，因此我们需要 M_t 满足方程

$$dM_t = -\mu M_t dW_t.$$

这一方程的解为

$$M_t = e^{-\mu W_t - (\mu^2/2)t} = \frac{e^{-\mu W_t}}{\mathbf{E}[e^{-\mu W_t}]}.$$

220

因此，如果给带漂移的布朗运动权重 M_t，则可以得到标准的布朗运动. 注意到，如果 $\mu > 0$，那么 M_t 对于更小的 W_t(因此 Z_t) 的路径相对更大.

例 2 假定 Z_t 满足

$$dZ_t = rZ_t dt + bZ_t dW_t,$$

见 (9.6). 那么我们需要找到满足条件 $dM_t = -(r/b) M_t dW_t$ 的 M_t. 我们已经看到

$$M_t = \exp\{-(r/b)W_t - (r/b)^2 t/2\}$$

满足这一条件. 因此 Z_t 是一个 $\widetilde{\mathbf{P}}$ 可测鞅，这里 $d\widetilde{\mathbf{P}} = M_t d\mathbf{P}$.

9.7 费因曼-卡茨公式

假设 Z_t 满足随机微分方程

$$dZ_t = a(Z_t)dt + b(Z_t)dW_t, \tag{9.12}$$

这里是 $a(x)$，$b(x)$ 是固定的函数. 这样的 Z_t 常常被称为（时齐）的扩散（time homogeneous diffusion). 注意到，Z_t 是一个马尔可夫过程，即取决于过去信息$\mathcal{F}_t$ 的未来状态 $\{Z_s: s \geq t\}$ 仅仅和 Z_t 的值有关. 扩散和某种二阶偏微分方程之间存在很紧密的联系.

假设 $f(x)$，$v(x)$ 为两个函数，且令

$$J_t = \exp\left\{\int_0^t v(Z_s)ds\right\}, V(t,x) = \mathbf{E}^x[f(Z_t)J_t].$$

这里 $\mathbf{E}^x[Y]$ 表示 $\mathbf{E}[Y \mid Z_0 = x]$. 我们假设对于所有 t，x，这个期望存在. 如果 $s < t$，那么

$$\begin{aligned} E[f(Z_t)J_t \mid \mathcal{F}_s] &= J_s E\left[f(Z_t)\exp\left\{\int_s^t v(Z_r)dr\right\} \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= J_s V(t-s, Z_s). \end{aligned}$$

左边是一个鞅，由于如果 $r < s$，那么

$$E[E[f(Z_t)J_t \mid \mathcal{F}_s] \mid \mathcal{F}_r] = E[f(Z_t)J_t \mid \mathcal{F}_r].$$

221

因此，我们知道如果 $M_s = J_s V(t-s, Z_s)$，那么对于 $0 \leq s \leq t$，M_s 是一个鞅. 假设足够可微，我们可以利用 Itô公式和乘积法则 (9.9)，写为

$$dM_s = J_s dV(t-s, Z_s) + V(t-s, Z_s)\dot{J}_s ds$$

$$=J_s[v(Z_s)V(t-s,Z_s)-\dot{V}(t-s,Z_s)+V'(t-s,Z_s)a(Z_s)$$
$$+\frac{1}{2}V''(t-s,Z_s)b^2(Z_s)]\mathrm{d}s+J_sV'(t-s,Z_s)b(Z_s)\mathrm{d}W_s.$$

由于 M_s 是一个鞅，dt 项永远是 0，同时 V 满足

$$\dot{V}(t,x)=\frac{1}{2}b^2(x)V''(t,x)+a(x)V'(t,x)+v(x)V(t,x).$$

费因曼-卡茨（Feynman-Kac）公式 满足初始条件 $V(0,\ x)=f(x)$ 的偏微分方程

$$\dot{V}(t,x)=\frac{1}{2}b^2(x)V''(t,x)+a(x)V'(t,x)+v(x)V(t,x)$$

的解为

$$V(t,x)=\mathbf{E}^x\left[f(Z_t)\exp\left\{\int_0^t v(Z_s)\mathrm{d}s\right\}\right],$$

这里 Z_t 满足（9.12）.

通过设定 $v=0$，我们可以看到 $V(t,\ x)=\mathbf{E}^x[f(Z_t)]$满足

$$\dot{V}(t,x)=\frac{1}{2}b^2(x)V''(t,x)+a(x)V'(t,x).$$

我们可以写成

$$\mathbf{E}^x[f(Z_t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)p(t,x,y)\mathrm{d}y,$$

这里 $p(t,x,\cdot)$ 表示假定 $Z_0=x$ 时随机变量 Z_t 的密度. 如果我们固定 x，那么 $p(t,\ y)=p(t,\ x,y)$ 是满足初始条件为在 x 的"δ 函数"的上述方程的解. 特别地，p 满足

$$\dot{p}(t,y)=\frac{1}{2}b^2(y)p''(t,y)+a(y)p'(t,y).$$

在下一节中，我们将需要一个时齐扩散的费因曼-卡茨公式

$$\mathrm{d}Z_t=a(t,Z_t)\mathrm{d}t+b(t,Z_t)\mathrm{d}W_t. \tag{9.13}$$

令 $v(t,\ x)$，$f(x)$ 为给定的函数. 我们固定一个 t_0，同时仅仅考虑 $0\leqslant t\leqslant t_0$. 令

222

$$J_t=\exp\left\{\int_0^t v(s,Z_s)\mathrm{d}s\right\},$$

且令

$$V(t,x)=\mathbf{E}\left[f(Z_{t_0})\exp\left\{\int_t^{t_0}v(s,Z_s)\mathrm{d}s\right\}\ \mid Z_t=z\right].$$

那么，

$$E[f(Z_{t_0})J_{t_0}\mid \mathcal{F}_t]=J_tV(t,Z_t).$$

由于左边是一个鞅，那么右边也是一个鞅. 利用乘积法则和 Itô公式，我们可以看到

$$-\dot{V}(t,x)=\frac{1}{2}b^2(t,Z_t)V''(t,x)+a(t,Z_t)V'(t,z)+v(t,Z_t)V(t,x)=0. \tag{9.14}$$

值得注意的是 $V(t_0,\ x)=f(x)$.

费因曼-卡茨公式Ⅱ 当 $0\leqslant t<t_0$ 和 $V(t_0,\ x)=f(x)$ 时，（9.14）式的解为

$$V(t,x)=\mathbf{E}^x\left[f(Z_{t_0})\exp\left\{\int_t^{t_0}v(s,Z_s)\mathrm{d}s\right\}\right], \tag{9.15}$$

这里 Z_t 满足 (9.13).

9.8 Black-Scholes 公式

Black-Scholes 公式是计算一个期权当前价值的一种方法，它是建立在满足随机微分方程的股票价格的基础上. 假设 S_t 表示一个股票的价格，且 S_t 满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

由 (9.6)，这一方程的解为

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}.$$

同时假设某人可以以无风险利率 r 来买入或者卖出一个债券. 如果我们令 Y_t 表示投入到债券中的现金总量，那么如果我们不买入或者卖出任何债券，现金总量的增长遵循下面的等式：

$$dY_t = rY_t dt.$$

一个欧式看涨期权 (European call option)（在时刻 T 的交割价格为 K）是拥有在时刻 T 以价格 K 购买股票的份额的一个机会. 如果 $S_T \leqslant K$，那么这样的期权是无用的，但是如果 $S_T > K$，那么可以得到价值为 $S_T - K$ 的收益，这代表买入股票后立即出售所得到的利润. 我们可以把价值写为 $(S_T - K)_+$，这里 $x_+ = \max\{x, 0\}$. Black-Scholes 公式是在假设不存在套利机会的前提下，决定在 $t \leqslant T$ 的时刻这种期权的价值. 令 V_t 表示这一价值. 显然，$V_T = (S_T - K)_+$，同时 V_t 是关于 $\mathcal{F}_t$ 可测的，$\mathcal{F}_t$ 表示在时刻 t 的信息. 有理由假定 $V_t = V(t, S_t)$；我们将来确定此函数的具体形式. 注意到 $V(T, x) = (x-K)_+$.

223

我们可以把期权想象成在时刻 $t \leqslant T$ 时具有价值 V_t 的资产. 假定我们在时刻 $t < T$ 卖出这样的一个期权，同时把得到的钱买入一个由股票和债券结合组成的证券投资组合，令 X_t 为股票所占份额，Y_t 为债券所占份额. 假设我们有基于某一特定时刻股票价格的股票和债券买卖策略. 这里 Y_t 由 X_t 决定，同时买股票的钱只由卖出债券得到，反之也成立.

在时刻 s 的证券投资组合（一个期权卖出加上股票和债券的所有资产）的价值为

$$U_t = -V(t, S_t) + O_t,$$

这里

$$O_t = X_t S_t + Y_t. \tag{9.16}$$

为了简单起见，我们假定 $U_0 = 0$，即在时刻 $t = 0$，我们卖出一个期权同时把钱投资到某种股票和债券的组合中.

假定我们用保证 $U_T \geqslant 0$ 的一个策略来监视这个投资直到时刻 T（股票和债券份额的改变由股票的价格决定）. 如果命题"存在一个正的概率使 $U_T > 0$"是真的，那么我们已经找到了一个不存在风险的获得收益的方法（以正的概率）. 这叫做套利 (arbitrage). 同样，如果一个策略保证 $U_T \leqslant 0$，且存在正的概率使得 $U_T < 0$，那么存在买期权的套利可能. Black-Scholes 公式的首要假定是：对于"自筹经费"的策略不存在套利机会.

自筹经费的假设是债券/股票组合投资的总价值变化由以下公式给定：

$$dO_t = X_t dS_t + rY_t dt. \tag{9.17}$$

换言之，价值的改变等于股票份额乘以股票价格的改变值再加上债券的持有数量乘以债券价格

的改变值. 假定 (9.17), 我们可以利用 Itô公式写成

$$\begin{aligned} dU_t &= -dV(t,S_t) + dO_t \\ &= -\dot{V}(t,S_t)dt - V'(t,S_t)dS_t - \frac{1}{2}V''(t,S_t)d\langle S\rangle_t \\ &\quad + X_t dS_t + rY_t dt. \end{aligned}$$

224

现在, 为了把随机性从组合投资价值中移除, 我们选择 $X_t = V'(t, S_t)$. 这使得 dW_t 项的系数为零并且

$$dU_t = \left[-\dot{V}(t,S_t) - \frac{1}{2}V''(t,S_t)\sigma^2 S_t^2 + rY_t\right]dt. \tag{9.18}$$

无套利现象的假定告诉我们这个等式等于0.

在式 (9.16) 中利用乘积法则 (9.9), 我们看到

$$dO_t = X_t dSt + dY_t + S_t dX_t + d\langle X, S\rangle_t.$$

因此, 自筹经费条件 (9.17) 可以写成

$$dY_t = rY_t dt - S_t dX_t - d\langle X, S\rangle_t.$$

因为 $X_t = V'(t, S_t)$, Itô公式给出

$$\begin{aligned} dX_t &= \left[\dot{V}'(t,S_t) + V''(t,S_t)\mu S_t + \frac{1}{2}V'''(t,S_t)\sigma^2 S_t^2\right]dt \\ &\quad + V''(t,S_t)\sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

因此, Y_t 必须满足

$$dY_t = rY_t dt - \left[\dot{V}'(t,S_t)S_t + V''(t,S_t)(\mu+\sigma^2)S_t^2 + \frac{1}{2}V'''(t,S_t)\sigma^2 S_t^3\right]dt - V''(t,S_t)\sigma S_t^2 dW_t. \tag{9.19}$$

令

$$Y_t = V(t,S_t) - S_t X_t = V(t,S_t) - S_t V'(t,S_t),$$

同时假设 $V(t, x)$ 已经选择使得式 (9.18) 为0, 即

$$\dot{V}(t,x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 V''(t,x) + rxV'(t,x) - rV(t,x) = 0. \tag{9.20}$$

那么 Itô公式计算得到 (9.19) 成立.

读者可能在计算中很困惑, 所以弄懂它是如何工作的是有价值的. 如果不存在套利机会且期权的定价合理, 那么任意不产生随机现象的策略同时将不会产生收益或损失. 因此, 组合投资的当前价值 O_t 也同样必须是等于那个时刻期权的价格, 即 $V(t, S_t) = O_t$. 因为我们必须具有份额为 $V'(t, S_t)$ 的股票来对冲期权, 那么债券的资产必须为

225

$$Y_t = O_t - X_t S_t = V(t,S_t) - V'(t,S_t)S_t.$$

带入 (9.18), 我们可以得到 Black-Scholes 公式 (9.20).

注意到 Black-Scholes 公式存在参数 r 和 σ^2, 但是参数 μ 并没有出现! 期权的价值仅仅由债券利率和方差参数 (有时被称为波动性 (volatility)) σ^2 决定. 我们需要找到边界条件为 $V(T, x) = (x-K)_+$ 的上述方程的解. r 上的依赖可以通过变量的简单变换来移除: 如果 V 满足 (9.20) 且 $r=0$,

$$\dot{V}(t,x)+\frac{1}{2}x^2\sigma^2V''(t,x)=0,\tag{9.21}$$

同时 $\tilde{V}(t,x)=e^{r(t-T)}V(t,e^{r(T-t)}x)$，那么 $\tilde{V}(t,x)$ 满足（9.20）且 $\tilde{V}(T,x)=V(T,x)$. 这可以通过微分来证明（习题 9.7）；然而，存在一个简单的理由说明此式正确. 如果现金的价值以利率 r 上涨，那么时刻 T 的 x 元钱相当于时刻 t 的 $e^{r(t-T)}x$ 元钱. 因此，当 $r=0$ 时，解此方程是足够可行的.

（9.21）的解的概率形式已经由费因曼-卡茨公式（9.15）给出；事实上，这一形式可以应用于不同收益 $V(T,x)=g(x)$ 的期权情形. 假设 $r=0$. 回想一下，$V(t,S_t)=O_t$，我们得到

$$dV(t,S_t)=V'(t,S_t)dS_t.$$

如果 $V(t,S_t)$ 是一个鞅，我们可以知道

$$\mathbf{E}[V(t,S_t)]=\mathbf{E}[V(T,S_T)]=\mathbf{E}[g(S_T)].$$

回想一下，S_t 满足

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t.$$

当且仅当 $\mu=0$，这是一个鞅. 然而，我们已经看到期权的价值不依赖于 μ 的值，因此可以设 $\mu=0$. 如果 $\mu=0$，此随机微分方程的解为

$$S_t=\exp\left\{\sigma w_t-\frac{\sigma^2}{2}t\right\}.$$

那么，我们有

$$\begin{aligned}V(T-t,x)&=\mathbf{E}[g(S_t)\mid S_t=x]\\&=\mathbf{E}\left[g\left(\exp\left\{\sigma w_t-\frac{\sigma^2 t}{2}\right\}\right)\mid W_t=\frac{\log x}{\sigma}\right]\\&=\mathbf{E}[g(xe^{-\sigma^2t/2}e^{\sigma\sqrt{t}N})],\end{aligned}$$

这里 N 是一个标准的正态分布.

假设 $g(y)=(y-K)_+$，那么，

$$V(T-t,e^{\sigma^2t/2}x)=\mathbf{E}[xe^{\sigma\sqrt{t}N}-K)_+].$$

226

通过一个直接但冗长乏味的计算（见习题 9.4），可以证明右边等于

$$xe^{\sigma^2t/2}\Phi\left(\frac{\log(x/K)+\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-K\Phi\left(\frac{\log(x/K)}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

这里 Φ 表示标准正态分布函数. 因此 $V(T-t,x)$ 为

$$x\Phi\left(\frac{\log(x/K)+\frac{1}{2}\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-K\Phi\left(\frac{\log(x/K)-\frac{1}{2}\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

这是当 $r=0$ 时的解，那么我们可以很容易把这一结果转换到一般的 r 的情形.

Black-Scholes 公式 假定 $V(t,x)$ 是（9.19）的解，它满足 $V(T,x)=(x-K)_+$. 那么，$V(T-t,x)$ 等于

$$x\Phi\left(\frac{\log(x/K)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-Ke^{-rt}\Phi\left(\frac{\log(x/K)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

这里 Φ 是标准正态分布函数.

我们把问题一般化，同时假定 S_t 满足

$$dS_t = \mu(t,S_t)S_t dt + \sigma(t,S_t)S_t dW_t,$$

这里 $\mu(t,\ x)$ 和 $\sigma(t,\ x)$ 是给定的函数. 我们不能给出这一随机微分方程的精确解. 然而，我们仍然可以给出欧式看涨期权价值的一个表达式. 假定我们有一个自筹经费组合投资，它的价值为 $O_t = X_t S_t + Y_t$，以此来“对冲”期权. 如果 $V(t,\ x)$ 表示期权的价值，那么为了移除随机性，我们选择 $X_t = -V'(t,\ S_t)$. 假定不存在套利，利用对冲策略的组合投资的价值和那个时刻期权的价值是完全一致的. 因此，$Y_t = O_t - X_t S_t = V(t,\ S_t) - V'(t,\ S_t)S_t$. 因此，我们再一次得到 Black-Scholes 公式（9.20），这里 σ^2 被 $\sigma^2(t,\ x)$ 代替. 我们需要找到下列等式的解：

$$\dot{V}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)V''(t,x) + rxV'(t,x) - rV(t,x) = 0,$$

这里 $V(T,\ x) = g(x)$. 再一次注意到 $\mu(t,\ x)$ 并没有出现在等式中. 在很多情形中，并不能给出解的定型形式. 然而，费因曼-卡茨公式（9.15）给出了此解的期望形式，且可以通过模拟来估计.

227

9.9 模拟

考虑一个随机微分方程

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t,$$

这里 a，b 是 x 的相当漂亮的函数且 W_t 代表一个标准的布朗运动. 上述方程的解为一个过程 X_t，它在任何特殊的时刻看起来像一个布朗运动，这个布朗运动带漂移参数 $a(X_t)$ 和方差参数 $b(X_t)$. 然而，很难给出这个方程的精确解，但却很容易利用随机游动在计算机上模拟这个过程.

选择一些很小的数 Δt. 我们可以通过一个时间增量为 Δt 和空间增量为 $\sqrt{\Delta t}$的简单随机游动来近似这个布朗运动. 为了做这个工作，令 Y_1，Y_2，…表示相互独立的随机变量且

$$\mathbf{P}\{Y_i = 1\} = \mathbf{P}\{Y_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

我们设 $X_0 = 0$ 且对于 $n > 0$，

$$X_{n\Delta t} = X_{(n-1)\Delta t} + a(X_{(n-1)\Delta t})\Delta t + b(X_{(n-1)\Delta t})\sqrt{\Delta t}Y_n.$$

实际运用中，通常为了简单起见，我们设增量为正态的. 如果 Z_1，Z_2，…是相互独立的标准正态随机变量，我们可以设 $X_0 = 0$ 且对于 $n > 0$，

$$X_{n\Delta t} = X_{(n-1)\Delta t} + a(X_{(n-1)\Delta t})\Delta t + b(X_{(n-1)\Delta t})\sqrt{\Delta t}Z_n.$$

9.10 习题

9.1 令 W_t 表示一维的标准布朗运动，且 $W_0 = 1$，同时 r 是一个实数. 令 T 表示使得 $W_t = 0$ 的首达时刻. 令 $R_t = W_t^r$.

(a) 写出 R_t 的随机微分方程（对有效的 $t < T$），即找到 f，g 使得

$$dR_t = f(R_t)dt + g(R_t)dW_t.$$

(b) 找到一个函数 F 使得 $M_{t\wedge T}$ 是一个鞅，这里

$$M_t = R_t \exp\left\{\int_0^t F(R_s)ds\right\}.$$

228

9.2 令 $d>1$ 且令 W_t 表示一个从 $x\neq 0$ 开始的 d 维标准布朗运动. 如果 $d=2$，则 $M_t=\log|W_t|$，如果 $d>2$，则 $M_t=|W_t|^{2-d}$. 证明 M_t 是一个鞅.

9.3 令 W_t 表示一个一维标准布朗运动且令 a，$b>0$. 令 $T_{a,-b}$ 表示使得 $W_t=a$ 或者 $W_t=-b$ 的首达时刻 t.

(a) 利用鞅 W_t 求 $\mathbf{P}\{W_{T_{a,-b}}=a\}$.

(b) 利用鞅 W_t^2-t 求 $\mathbf{E}[T_{a,-b}]$.

(c) 解释为什么随机变量 $T_{a,-a}$ 和 $W_{T_{a,-a}}$ 是相互独立的.

(d) 对于所有的 a，b，随机变量 $W_{T_{a,-b}}$ 和 $T_{a,-b}$ 是相互独立的吗?

(e) 利用鞅 $e^{\lambda W_t-(\lambda/2)t}$ 计算 $T_{a,-a}$ 的矩母函数.

9.4 假设 N 是一个标准的单位正态随机变量，且 $X=ae^{bN}$，这里 a，$b>0$，证明 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{xb}\phi\left(\frac{\log(x/a)}{b}\right), 0 < x < \infty,$$

这里 $\phi(z)=(2\pi)^{-1}e^{-z^2/2}$ 是 N 的密度函数. 如果 $K>0$，证明

$$\int_0^\infty (x-k)+f(x)dx = ae^{b^2/2}\Phi\left(\frac{\log(a/K)+b^2}{b}\right) - K\Phi\left(\frac{\log(a/K)}{b}\right),$$

这里 Φ 表示 N 的分布函数.

9.5 令 X_1，X_2，…是相互独立的分布为 $N(0, 1)$ 的随机变量序列，且令 f 是一个连续有界函数. 令 $Z_0=0$ 且对于 $n>0$，

$$Z_n = Z_{n-1} + f(Z_{n-1}) + X_n.$$

我们将对 Z_n 做吉尔萨诺夫变换，使得 Z_n 是一个鞅（关于$\mathcal{F}_n$，这里$\mathcal{F}_n$ 表示在 X_1，…，X_n 中的信息).

(a) 如果 a 是一个实数，计算 $\mathbf{E}[X_1e^{aX_1}]$.（读者可以直接计算，也可以对 a 的矩母函数 $\mathbf{E}[e^{aX_1}]$求导).

(b) 令 $M_0=1$，且对于 $n>0$，

$$M_n = \exp\left\{-\sum_{j=1}^n f(Z_{j-1})X_j - \sum_{j=1}^n \frac{f(Z_{j-1})^2}{2}\right\}.$$

证明：M_n 是一个关于$\mathcal{F}_n$ 的鞅.

(c) 证明：M_nZ_n 是关于$\mathcal{F}_n$ 的一个鞅.

(d) 证明：Z_n 是一个 $\tilde{\mathbf{P}}$ 鞅，这里 $d\tilde{\mathbf{P}}=M_n d\mathbf{P}$.

229

9.6 假定 W_t 是一个一维的标准布朗运动. 假定 $Z_0=1$ 且 Z_t 满足贝塞尔方程

$$dZ_t = \frac{a}{Z_t}dt + dW_t.$$

这里 a 是一个实数且我们只考虑 $t<T=\min\{s: Z_s=0\}$.

(a) 找到一个非常数的可微函数 ϕ 使得 $M_t=\phi(Z_{t\wedge T})$ 是一个鞅. [提示：利用 Itô公式找到一个 ϕ 满足的微分方程，然后解这个方程.]

(b) 如果 $0<\varepsilon<1<\alpha$ 且 $S=S(\varepsilon,\alpha)$ 表示使得 $Z_t=\varepsilon$ 或者 $Z_t=\alpha$ 的首达时刻 t，求 $\mathbf{P}\{Z_S=\varepsilon\}$.

(c) 求存在某些时刻 t 使得 $Z_t=\varepsilon$ 的概率. a 取何值时这个概率等于 1?

(d) 当 a 为何值时，过程在有限的时间内到达原点?

9.7 证明：如果 $V(t,x)$ 满足 (9.21)，那么 $\tilde{V}(t,x):=e^{r(t-T)}V(t,e^{r(T-t)}x)$ 满足 (9.20).

9.8 计算机模拟. 假设 X_t 是一个满足如下随机微分方程的一个过程：

$$dX_t=a(X_t)dt+b(X_t)dW_t,$$

这里

$$a(x)=0,$$

$$b(x)=\begin{cases}2, x>0\\1, x<0.\end{cases}$$

利用 $\Delta t=1/100$ 得到 X_t 的许多模拟值. 估计：

(a) $\mathbf{E}(X_1)$.

(b) $\mathbf{P}\{X_1>0\}$，期望读者利用 ±1 和正态增量，同时比较这两个结果.

9.9 当

$$a(x)=x,$$

$$b(x)=|x|^{3/4}$$

230 时，重做习题 9.8.

进一步阅读的建议

进一步阅读存在很多种可能. 我们这里给出一些建议，但是并不打算给出一个完整的清单.

本科水平的概率基础课本有：

G. Grimmett and D. Stirzaker，*Probability and Random Processes*，Oxford University Press.

J. Pitman，*Probability*，Springer-Verlag.

本科水平的随机过程课本有：

G. Grimmett and D. Stirzaker，*Probability and Random Processes*，Oxford Universtity Press.

S. Karlin and H. Taylor，*A First Course in Stochastic Processses* and *A Second Coures in Stochastic Processes*，Academic Press.

S. Resnik，*Adventures in Stochastic Processes*，Birkhäuser.

为了把随机过程提高到更高的水平，需要对高等计算（本科生实分析）和测度论有基本的了解. 这方面的书目有：

R. Strichartz，*The Way of Analysis*，Jones and Bartlett Mathematics.

R. Bartle，*The Elements of Integration and Lebesgu* Measure，Wiley.

下一步就是从测度理论的角度学习概率. 如下书目同时包含测度理论：

P. Billingsley，*Probability and Measure*，Wiley.

R. Durrett，*Probability：Theory and Examples*，Thomson Brooks/Cole.

J. Jacod&P. Protter，*Probability Essentials*，Springer-Verlag.

D. Williams，*Probability with Martingales*，Cambridge University Press.

利用概率测度论来考虑布朗运动和随机积分的书目有：

K. Chung&R. Williams，*An Introduction to Stochastic Integration*，Birkhäuser.

R. Durrett，*Stochastic Calculus：A Practical Introduction*，CRC Press.

I. Karatzas and S. Shreve，*Brownian Motion and Stochastic Calculus*，Springer-Verlag.

B. Oksendal，*Stochastic Differential Equations*，Springer-Verlag.

索　引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

aperiodic（非周期）22
arbitrage（套利）224

backward equation（向后方程）82
birth-and-death processes（生灭过程）74 - 81
Black-Scholes formula 公式 227
branching process（分支过程）53 - 57，116，127
Brownian motion（布朗运动）173 - 198
  geometric（几何）209
  one-dimensional（一维）174
  several dimensions（多维）184
  standard（标准）174
  with drift（带漂移）193
  zero set（零集）181

Cantor set（康托尔集）182 - 183
Chapman-Kolmogorov equation（查普曼-柯尔莫戈洛夫方程）44，177，184，194
communication classes（互通类）20
conditional expectation（条件期望）101 - 109
convolution（卷积）137

difference equations（差分方程）3 - 6
differential equations（微分方程）1 - 3
Dirichlet problem（狄利克雷问题）92，186
discounting（折现）96
Doob maximal inequality（杜布极大不等式）123，124，217

equilibrium distribution（平稳分布，见 invariant distribution）

explosion（爆炸）81
exponential alarm clocks（指数型闹钟）69，72
exponential distribution（指数分布）68
exponential martingale（指数鞅）216
extinction probability（灭绝概率）55 - 57

Feynman-Kac formula（费因曼-卡茨公式）221 - 223
forward equation（向前方程）82
fractal dimension（分形维数）181 - 182

gambler's ruin（赌徒输光）30 - 31，112 - 113，187
generating function（生成函数）55
Gibbs samplers（吉布斯采样器）165
Girsanov transformation（吉尔萨诺夫变换）220
graph（图）12

harmonic function（调和函数）119，168，218
heat equation（热传导方程）186 - 189

infinitesimal generator（无穷小生成元）70
invariant distribution（不变分布）15，51 - 52，73，78
irreducibility（不可约）20，76
Ising model（伊辛模型）164
Itô's formula（Itô公式）205 - 216

Jensen's inequality（詹森不等式）125

Markov chains（可尔可夫链）
  countable（可数）43

finite（有限）9
finite，continuous-time（有限，连续时间）68－74
Monte Carlo（蒙特卡罗）162－166
reversible（可逆）155
Markov property（马尔可夫性质）1，9，176－177
martingale（鞅）106，217
martingale betting strategy（鞅赌博策略）107－108
martingale convergence theorem（鞅收敛定理）117
measurable（可测）103
Metropolis algorithms（模拟退火算法）165

null recurrence（零常返）51－53，78

optimal stopping（最优停时）87－97
optional sampling theorem（可选抽样定理）112，115，217

periodic（周期）21－24
Perron-Frobenius theorem（佩龙-弗罗贝尼乌斯定理）17，40－41
Poisson process（泊松过程）65－68，131
Polya's urn（Polya 坛子）109，116－117，119，122
positive recurrence（正常返）51－53，78

quadratic variation（二次变差）51－51，207，211
queues（排队）10，44－45
$G/M/1$ 150－151
$M/G/1$ 133，148－149
$M/M/k$ 75

random harmonic series（随机调和序列）115－116，119
random walk（随机游动）
absorbin boundary（吸收壁）12，18，30－31
biased（偏）12
graph（图）12，21，31
partially reflecting（部分反射壁）44，52－53
reflecting boundary（反射壁）11，18，29
simple（简单）44，46－49
symmetric（对称）12
recurrence（常返）50－53，77，119－120，189－191
recurrent class（常返类）20，29－30
reflection principle（反射原理）122，178
renewal equation（更新函数）138
renewal process（更新过程）131
age（年龄）133，138－141，145
central limit theorem（中心极限定理）135
law of large numbers（大数定律）134
lifetime（终身寿命）141－142，147
residual life（剩余寿命）141－142，146
renewal theorems（更新定理）136－137
return times（返回时间）25，51，131－132

self-financing（自筹经费）224
simple strategy（简单策略）201
state space（状态空间）1
stationary distribution（平稳分布，见 invariant distribution）
steady-state distribution（稳定状态分布，见 invariant distribution）
Stirling's formula（斯特林公式）47－63
stochastic integral（随机积分）199－228
stochastic matrix（随机矩阵）10
stochastic process（随机过程）1
stopping time（停时）88，110，177
strong Markov property（强马尔可夫性）147
substochastic matrix（子随机矩阵）27
submartingale（下鞅）109，123
superharmonic function（上调和函数）62，89
supermartingale（上鞅）109

transience（非常返）50 - 53，77，119 - 120，189 - 191
transient class（非常返类）20，26 - 30
transition matrix（转移矩阵）10

uniform integrability（一致可积）114 - 116

value（价值）89

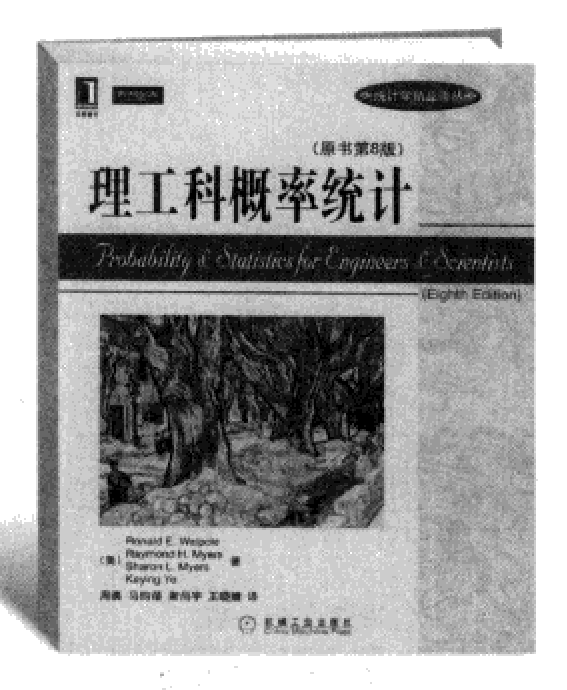
waiting times（等待时间）67 - 68，69
Wald’s equation（瓦尔德等式）129，149
Wiener process（维纳过程）174

Yule process（尤尔过程）76，79 - 80



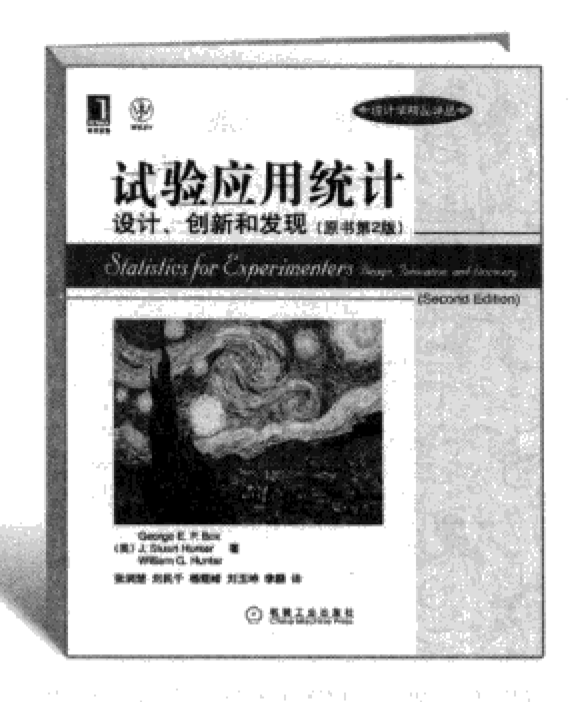
本书是一本联系实际应用的统计方面的教材。全书共17章，主要介绍描述性统计、概率、离散随机变量、连续随机变量、二元概率分布及抽样分布、置信区间估计、假设检验、分类数据分析、简单线性回归、多重回归分析、模型构造、试验设计的原则、试验设计的方差分析、非参数统计、统计过程和质量控制、产品和系统的可靠性。

作者：（美）William Mendenhall; Terry Sincich 著
ISBN：978-7-111-26437-8
定价：128.00



本书深入浅出地介绍统计理论与方法，突出统计思想，为便于读者学习和掌握所介绍的各种统计方法，列举了大量的实际数据例子。

作者：（美）Ronald E. Walpole 等著
ISBN：978-7-111-27708-8
定价：98.00



本书从试验工作者的角度阐述了统计方法在试验设计中的应用，强调科学地利用统计工作从试验数据中获取最大的信息。内容主要包括：基础知识、比较两总体、两水平因析设计、部分因析设计、因析设计及数据变换、变差的多种来源、最小二乘与试验设计的必要性、响应曲面的某些应用等。

作者：（美）George E. P. Box 等著
书号：978-7-111-27258-8
定价：65.00元

教师服务登记表

尊敬的老师：

您好！感谢您购买我们出版的____教材。

机械工业出版社华章公司为了进一步加强与高校教师的联系与沟通，更好地为高校教师服务，特制此表，请您填妥后发回给我们，我们将定期向您寄送华章公司最新的图书出版信息！感谢合作！

个人资料（请用正楷完整填写）

教师姓名		□先生 □女士	出生年月		职务		职称：□教授 □副教授 □讲师 □助教 □其他
学校			学院		系别		
联系 电话	办公： 宅电： 移动：		联系地址 及邮编				
			E-mail				
学历		毕业院校		国外进修及讲学经历			
研究领域							

主讲课程	现用教材名	作者及出版社	共同授课教师	教材满意度
课程： □专 □本 □研 人数： 学期：□春□秋				□满意 □一般 □不满意 □希望更换
课程： □专 □本 □研 人数： 学期：□春□秋				□满意 □一般 □不满意 □希望更换

样书申请			
已出版著作		已出版译作	
是否愿意从事翻译/著作工作 □是 □否		方向	
意见和建议			

填妥后请选择以下任何一种方式将此表返回：（如方便请赐名片）

地 址：北京市西城区百万庄南街1号 华章公司营销中心 邮编：100037

电 话：(010) 68353079 88378995 传真：(010)68995260

E-mail:hzedu@hzbook.com markerting@hzbook.com 图书详情可登录http://www.hzbook.com网站查询

[General Information]
书名=随机过程导论　　原书第2版
作者=（美）劳勒著
页数=172
出版社=北京市：机械工业出版社
出版日期=2010.09
SS号=12672965
DX号=000006975136
URL=http://book.szdnet.org.cn/bookDetail.jsp?dxNumber=000006975136&d=E2CA9880F1153126BE656B0CB060A6E3